12. hodina (MA2-E)

Diferenciální rovnice

2) *Metoda variace konstanty*

Definice 2.5 **Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu** (zkráceně **LDR**) nazýváme každou rovnici tvaru

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité funkce na určitém intervalu $\langle a, b \rangle$. Dále

1. je-li $q(x) = 0$, hovoříme o **zkrácené (homogenní) LDR**,
2. je-li $q(x) \neq 0$, hovoříme o **nezkrácené (úplné, nehomogenní) LDR**.

(V našem případě nazveme „zkrácenou lineární rovnici“ jako rovnici **homogenní**)

Věta 8.3.1.

Zkrácená lineární rovnice má obecné řešení

$$\hat{y}(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} .$$

Důkaz: Ve zkrácené rovnici lze proměnné snadno separovat, a proto

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \int p(x)\,dx + \ln C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} .$$

Příklad A Určete řešení následující diferenciální rovnice:

$$y' + y \cdot x = 0$$

Věta 8.3.2.

Obecné řešení úplné lineární rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x) ,$$

kde $\hat{y}(x)$ je řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení úplné lineární rovnice.

Umíme-li stanovit řešení zkrácené LDR (zpravidla to není obtížné), zbývá nalézt způsob určení partikulárního integrálu $v(x)$. Seznámíme se s postupem nazývaným

metoda variace konstanty. Její princip spočívá v realizaci předpokladu, že řešení zkrácené rovnice

$$\hat{y}(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

bude vyhovovat rovnici úplné, jestliže nahradíme konstantu C vhodnou funkcí, kterou určíme výpočtem. Budeme tedy předpokládat, že

$$y(x) = C(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

je hledaným řešením a dosadíme tuto funkci do úplné rovnice:

$$\underbrace{C'(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} - C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}.p(x)}_{y'(x)} + \underbrace{C(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}}_{y(x)}.p(x) = q(x)\,.$$

Na levé straně se odečtou členy obsahující funkci $C(x)$, takže zůstane pouze vztah

$$C'(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} = q(x)\,, \qquad \text{odkud} \qquad C'(x) = q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\,.$$

Finální tvar funkce $C(x)$ stanovíme opět integrací:

$$C(x) = \int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + K$$

s definitivní konstantou K. Tento výsledek nyní dosadíme do výrazu pro řešení zkrácené rovnice, abychom získali obecné řešení úplné rovnice:

$$y(x) = \left(\int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + K\right).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

Po roznásobení obdržíme konečnou podobu hledaného řešení, která odpovídá očekávanému tvaru:

$$y(x) = \underbrace{K.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}.\int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}}_{v(x)}\,.$$

Tím jsme v podstatě provedli konstruktivní důkaz následujícího tvrzení o podobě řešení lineární rovnice.

Věta 8.3.3.

Úplná lineární rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ má obecné řešení $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$ tvořené součtem řešení zkrácené rovnice a partikulárního integrálu

$$v(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} . \int q(x) . \mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} .$$

Příklad B Určete řešení následující diferenciální rovnice:

$$y' + y \cdot x = xe^{-x^2/2}$$

Řešení: $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2/2}$

Příklad 8.3.1. Najděte obecné řešení rovnic $xy' - y = 2x^3$.

Řešení: Přepíšeme-li zadání do tvaru

$$y' - \frac{1}{x} y = x^2 ,$$

vidíme, že jde o lineární rovnici, v níž $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x^2$. Při jejím řešení budeme postupovat podrobně podle kroků popsaných v odvození.

1. Nejprve vyřešíme separací proměnných zkrácenou rovnici:

$$y' - \frac{1}{x} y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x| + C ,$$

odkud

$$\hat{y} = Cx .$$

2. Nyní přistoupíme k variaci konstanty, při níž budeme předpokládat, že $y(x) = C(x).x$. Tuto funkci a její derivaci $y'(x) = C'(x).x + C(x)$ dosadíme do úplné rovnice:

$$x.\,(C'(x).x + C(x)) - (C'(x).x + C(x)) = 2x^3\,.$$

Vzhledem k tomu, že byl dosavadní postup správný, vyruší se členy $\pm C(x).x$ a lze pokračovat dalšími kroky:

$$C'(x).x^2 = 2x^3 \qquad \Longrightarrow \qquad C(x) = \int 2x\,dx = x^2 + K\,.$$

3. Získaný výsledek dosadíme zpět do řešení zkrácené rovnice a po drobné úpravě dostáváme hledané obecné řešení:

$$y(x) = (x^2 + K).x = Kx + x^3\,.$$

4. Na závěr provedeme zkoušku dosazením do levé strany zadané rovnice:

$$x(K + 3x^2) - Kx - x^3 = 2x^3\,,$$

což je rovno výrazu na pravé straně.

Příklad 8.3.2. Řešte počáteční úlohu $y'\sin x - y\cos x = \sin^3 x,\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

Řešení: Opět se nejprve ujistíme, že jde o lineární rovnici:

$$y' - y\,\frac{\cos x}{\sin x} = \sin^2 x\,, \qquad \text{tj.} \quad p(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}\,, \quad q(x) = \sin^2 x\,.$$

1. Zkrácená rovnice:

$$y' = y\,\frac{\cos x}{\sin x} \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C\,.$$

Řešení zkrácené rovnice:

$$\hat{y} = C.\sin x\,.$$

2. Variace konstanty:

$$y = C(x).\sin x\,, \qquad y' = C'.\sin x + C.\cos x\,.$$

Dosazení do úplné rovnice:

$$(C'.\sin x + C.\cos x).\sin x - C.\sin x.\cos x = \sin^3 x \ ,$$

$$C' \sin^2 x = \sin^3 x \qquad \Longrightarrow \qquad C(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + K \, .$$

3. Zpětné dosazení:

$$y(x) = (-\cos x + K).\sin x = K \sin x - \sin x \cos x \ .$$

4. Počáteční úloha pro $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = K \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2} = K\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad K = \sqrt{2} \, .$$

Výsledné řešení má tedy tvar

$$y_p(x) = \sqrt{2} \sin x - \sin x \cos x \, .$$

1. Najděte obecné řešení:

a) $y' - y = \mathrm{e}^{2x}$,

b) $y' - \frac{x+1}{x} y = x^2$,

c) $(x^2+1)y' - 2xy = x^2$.

2. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $xy' - y = \sqrt{x}$, $\quad y(4) = 12$,

b) $y' + y.\mathrm{cotg}\, x = 1$, $\quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$,

c) $x^2 y' + xy = \ln x$, $\quad y(1) = \frac{1}{2}$.

Řešení:

1. a) $y = K\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$, b) $y = Kx\mathrm{e}^x - x^2 - x$,

c) $y = K(x^2+1) + (x^2+1)(x - \mathrm{arctg}\, x)$.

2. a) $y = 2x\sqrt{x} - x$, b) $y = \mathrm{cotg}\, x$, c) $y = \frac{1+\ln^2 x}{2x}$.