12. hodina **MA-E**

Definice 2.3.1.

Determinantem (řádu n) **čtvercové matice $\mathbf{A}$** řádu n, jejímiž prvky a_{ij} jsou reálná (popř. komplexní) čísla, nazýváme ***číslo***, které značíme ***det*** $\mathbf{A}$; $|\mathbf{A}|$ a definujeme takto:

1. Je-li $n = 1$, pak det $\mathbf{A} = a_{11}$.
2. Pro $n \geq 2$ je

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \mathbf{A}_{1j} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

kde matice $\mathbf{A}_{1j}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním prvního řádku a j-tého sloupce.

Determinant má v teorii matic široké využití: s jeho pomocí lze vypočítat inverzní matici, lze jím ověřit lineární závislost nebo nezávislost řádků čtvercové matice nebo ho lze využít při hledání neznámých místo Gaussovy eliminace (tzv. Cramerovo pravidlo).

1. Pro matici $\mathbf{A}$ řádu $n = 2$ platí

det $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, tj. od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále.

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

---

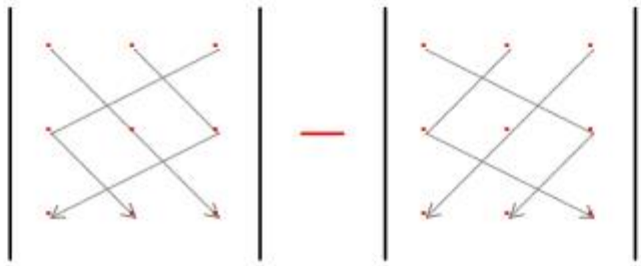
2. Pro matici $\mathbf{A}$ řádu $n = 3$ platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Tento výpočet si snadno zapamatujeme podle tzv. ***Sarrusova pravidla***:



Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Determinant matice $\mathbf{A}$ se nezmění, přičteme-li k p-tému řádku (sloupci) matice $\mathbf{A}$ libovolnou lineární kombinaci zbývajících řádků (sloupců).

2. Větu 5 používáme při výpočtu determinantů vyšších řádů tak, abychom přičtením vhodné lineární kombinace získali v některém řádku (sloupci) co nejvíce nul. Pak provedeme rozvoj podle tohoto řádku (sloupce).

3. Užitím věty 5 můžeme matici převést na matici trojúhelníkovou. Pak platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & & \\ 0 & 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}. \dots .a_{nn},$$

tj. determinant se rovná součinu prvků na hlavní diagonále, což vyplývá přímo z věty 1.

Pro výpočet determinantů matic řádu $n \geq 4$ však neexistuje žádné obdobné pravidlo jako je Sarrusovo, které platí pouze pro determinanty matic řádu třetího. Abychom nemuseli tyto determinanty počítat jen na základě definice, seznámíme se s některými důležitými vlastnostmi determinantů, s jejichž pomocí se výpočet zjednoduší.

Vlastnosti determinantů

Věta 2.3.1. (Laplaceův rozvoj). Pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu n platí:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} . \det \mathbf{A}_{ij}$$ - rozvoj determinantu podle i-tého řádku,

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} . \det \mathbf{A}_{ij}$$ - rozvoj determinantu podle j-tého sloupce,

kde matice $\mathbf{A}_{ij}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Poznámky

1. *Determinant matice $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme subdeterminantem vzhledem k prvku a_{ij}.*
2. *Součin $(-1)^{i+j}$. det $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} a značíme*

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$

Příklad Vypočtěme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -2 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Další úlohy:

1. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{24} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{6} \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a-2 \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}x & -1 \\ 1 & \mathrm{tg}x \end{vmatrix}$.

2. Vypočtěte determinanty pomocí Sarrusova pravidla:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$.

---

4. Vypočtěte determinanty úpravou na trojúhelníkový tvar:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

---

5. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & 8 \\ -3 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & -2 \\ -9 & 6 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & 10 & -12 \end{vmatrix}$.

---

1. **a)** -17, **b)** 10, **c)** 22, **d)** $\sqrt{3}$, **e)** $\frac{9}{2}$, **f)** (1 - 2a), g) $\frac{1}{\cos^2 x}$.

2. **a)** -8, **b)** 50, **c)** -18, **d)** -43, **e)** -125, **f)** $(- x^2 + x)$.

3. **a)** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, **b)** $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1$.

4. **a)** 1, **b)** 0, **c)** -6.

5. **a)** 10, **b)** 6, **c)** 1, **d)** 1, **e)** -40, **f)** 24.

Definice 2.4.1.

Inverzní maticí k čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu n rozumíme takovou čtvercovou matici $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n, pro kterou platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n.

Definice 2.4.2.

Čtvercová **matice** $\mathbf{A}$ řádu $n \geq 2$, jejíž determinant det $\mathbf{A} \neq 0$, se nazývá ***regulární***. V opačném případě jí říkáme ***singulární*** (det $\mathbf{A} = 0$).

Věta 2.4.1.

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n \geq 2$ a $\mathbf{A}^*$ je matice utvořená z algebraických doplňků $\mathbf{A}^*_{ik}$ prvků $a_{ik} \in \mathbf{A}$. Pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A}^*)^T.$$

Matici $(\mathbf{A}^*)^T$ nazýváme ***adjungovanou*** maticí k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\tilde{\mathbf{A}}$, tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}.$$

Příklad Určeme inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A}_{11}^{*} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 18 \qquad \mathbf{A}_{12}^{*} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -24 \qquad \mathbf{A}_{13}^{*} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\mathbf{A}_{21}^{*} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad \mathbf{A}_{22}^{*} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 \qquad \mathbf{A}_{23}^{*} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbf{A}_{31}^{*} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \mathbf{A}_{32}^{*} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \mathbf{A}_{33}^{*} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathbf{A}^{*} = \begin{pmatrix} 18 & -24 & 6 \\ -10 & 15 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{*})^{T} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Další úlohy:

1. Vypočítejte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ a proveďte zkoušku:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
