13. hodina (MA2-E)

Diferenciální rovnice

1) *Metoda variace konstanty (opakování)*

1. Najděte obecné řešení:

a) $y' - y = \mathrm{e}^{2x}$,

b) $y' - \frac{x+1}{x} y = x^2$,

c) $(x^2+1)y' - 2xy = x^2$.

2. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $xy' - y = \sqrt{x}, \quad y(4) = 12$,

b) $y' + y.\operatorname{cotg} x = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$,

c) $x^2 y' + xy = \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}$.

Řešení:

1. a) $y = K\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$, b) $y = Kx\mathrm{e}^x - x^2 - x$,

c) $y = K(x^2+1) + (x^2+1)(x - \operatorname{arctg} x)$.

2. a) $y = 2x\sqrt{x} - x$, b) $y = \operatorname{cotg} x$, c) $y = \frac{1+\ln^2 x}{2x}$.

2) *Lineární diferenciální rovnice 2. řádu*

Definice 9.1.1.

Lineární diferenciální rovnice (LDR) **druhého řádu** má tvar

$$a_2(x).y''(x) + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = b(x) \ ,$$

kde funkce (nebo konstanty) $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ jsou **koeficienty rovnice** a funkci $b(x)$ nazýváme **pravou stranou** rovnice. Je-li na nějakém intervalu $b(x) = 0$, jedná se o **zkrácenou** (**homogenní**) LDR, je-li $b(x) \neq 0$, hovoříme o rovnici **nezkrácené** (**úplné**).

Stejně jako v minulém případě, i zde budeme zkrácenou rovnici nazývat **homogenní.**

Věta 9.1.3.

Jsou-li $y_1(x)$, $y_2(x)$ dvě lineárně nezávislá řešení zkrácené rovnice

$$a_2(x).y''(x) + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = 0 \ ,$$

má její obecné řešení tvar $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty.

Důkaz: Dosadíme-li předpokládané obecné řešení do levé strany rovnice, obdržíme jednoduchým uspořádáním členů tvar

$$C_1(a_2.y_1'' + a_1.y_1' + a_0.y_1) + C_2(a_2.y_2'' + a_1.y_2' + a_0.y_2) \ .$$

Protože každá z funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ je řešením rovnice, jsou členy v závorkách nulové a tedy celý výraz rovněž. To znamená, že tvrzení věty platí.

3) *Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty*

Zaměříme se na **zkrácené rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty**, jejichž obecný tvar je

$$a_2\ y''(x) + a_1\ y'(x) + a_0\ y(x) = 0\ ,$$

kde $a_0,\ a_1,\ a_2$ jsou reálné koeficienty. Ukážeme nejprve zásadní skutečnost, že existují řešení této rovnice ve tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{rx}\ ,$$

kde r je zatím nespecifikovaná konstanta. Snadno určíme derivace

$$y'(x) = r\mathrm{e}^{rx}\ , \quad y''(x) = r^2\mathrm{e}^{rx}\ ,$$

které dosadíme do původní rovnice. Po vydělení výrazem e^{rx} dostáváme

$$a_2\ r^2 + a_1\ r + a_0 = 0\ ,$$

což je kvadratická rovnice pro neznámou r. Tento výsledek znamená, že funkce $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ bude řešením diferenciální rovnice právě tehdy, když r bude řešením příslušné algebraické rovnice.

Definice 9.2.1.

Kvadratickou rovnici $a_2\ r^2 + a_1\ r + a_0 = 0$ nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice $a_2\ y''(x) + a_1\ y'(x) + a_0\ y(x) = 0$.

Věta 9.2.1.

Mějme lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0\,,$$

s charakteristickou rovnicí $a_2\, r^2 + a_1\, r + a_0 = 0$.

(a) Má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny $r_1,\ r_2$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x},\ y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}\,, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(b) Má-li charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen r, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{rx},\ y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{rx} + C_2 x \mathrm{e}^{rx} = \mathrm{e}^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right)\,, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(c) Má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\ + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Příklad 9.2.1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - r - 2 = 0$ má kořeny $r_1 = 2,\ r_2 = -1$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{2x},\ y_2 = \mathrm{e}^{-x}$, obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\ \mathrm{e}^{2x} + C_2\ \mathrm{e}^{-x}\ .$$

Příklad 9.2.2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 4r + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $r = 2$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{2x}$, obecné řešení napíšeme například ve tvaru

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,x\mathrm{e}^{2x}\ .$$

Příklad 9.2.3. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 6r + 13 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $r_{1,2} = 3 \pm 2\mathrm{i}$. Fundamentální systém v reálném oboru budou podle tvrzení (c) předchozí věty tvořit funkce $y_1 = \mathrm{e}^{3x}\cos 2x$, $y_2 = \mathrm{e}^{3x}\sin 2x$, obecné řešení zapíšeme ve tvaru

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x}\cos 2x + C_2\mathrm{e}^{3x}\sin 2x.$$

Příklad 9.2.5. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 9y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 + 9 = 0$ má kořeny $r_1 = 3\mathrm{i}$, $r_2 = -3\mathrm{i}$. Fundamentální systém tvoří dvojice $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$, obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$y(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\ .$$

2. Najděte obecná řešení rovnic s konstantními koeficienty:

a) $4y'' - y = 0$, b) $y'' + 7y' + 10y = 0$,

c) $4y'' + y = 0$, d) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

3. Řešte počáteční úlohy:

a) $y'' - y' - 12y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -1$,

b) $y'' + y = 0$, $y(\pi) = y'(\pi) = 2$,

c) $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -12$.

Řešení:

2. a) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$, b) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-5x}$,

c) $y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}$, d) $y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

3. a) $y = 2e^{4x} + 3e^{-3x}$, b) $y = -2 \cos x - 2 \sin x$, c) $y = 3e^{-4x} - 3$.