13. hodina **MA-E**

Definice 2.3.1.

Determinantem (řádu n) **čtvercové matice $\mathbf{A}$** řádu n, jejímiž prvky a_{ij} jsou reálná (popř. komplexní) čísla, nazýváme ***číslo***, které značíme ***det*** $\mathbf{A}$; $|\mathbf{A}|$ a definujeme takto:

1. Je-li n = 1, pak det $\mathbf{A} = a_{11}$.
2. Pro $n \geq 2$ je

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \mathbf{A}_{1j} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

kde matice $\mathbf{A}_{1j}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním prvního řádku a j-tého sloupce.

Definice 2.4.1.

Inverzní maticí k čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu n rozumíme takovou čtvercovou matici $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n, pro kterou platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n.

Definice 2.4.2.

Čtvercová **matice $\mathbf{A}$** řádu $n \geq 2$, jejíž determinant det $\mathbf{A} \neq 0$, se nazývá ***regulární***. V opačném případě jí říkáme ***singulární*** (det $\mathbf{A} = 0$).

Věta 2.4.1.

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n \geq 2$ a $\mathbf{A}^*$ je matice utvořená z algebraických doplňků $\mathbf{A}^*_{ik}$ prvků $a_{ik} \in \mathbf{A}$. Pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A}^*)^T.$$

Matici $(\mathbf{A}^*)^T$ nazýváme ***adjungovanou*** maticí k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\widetilde{\mathbf{A}}$, tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}.$$

Příklad Určeme inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A}^*_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 18 \qquad \mathbf{A}^*_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -24 \qquad \mathbf{A}^*_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\mathbf{A}^*_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad \mathbf{A}^*_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 \qquad \mathbf{A}^*_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbf{A}^*_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \mathbf{A}^*_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \mathbf{A}^*_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 18 & -24 & 6 \\ -10 & 15 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^T = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Vypočítejte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ a proveďte zkoušku:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

1. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje (det $\mathbf{A} = 0$), e) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

---

Gauss-Jordanova metoda:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Inverzn%C3%AD_matice

Vlevo zadaná matice, vpravo matice jednotková:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

---

2. Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -24 & 3 \\ -44 & 15 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Opakování:

Gaussova eliminace:

1. Řešte různými způsoby soustavy lineárních rovnic

a) $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 7 \end{array}$,
b) $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 6y & = & 4 \\ 3x & - & 9y & = & 1 \end{array}$,
c) $\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & y & + & 2z & = & 4 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 9 \\ -4x & + & 2y & + & 3z & = & -17 \end{array}$,

d) $\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 2y & + & 6z & = & -4 \\ 7x & + & 5y & - & 2z & = & 14 \\ 2x & - & 8y & + & 5z & = & -11 \\ -3x & - & 3y & - & 7z & = & 1 \end{array}$,
e) $\begin{array}{rcrcrcr} 6x & - & 3y & & & = & 24 \\ & & 4y & - & 7z & = & -13 \\ 5x & & & + & 6z & = & 43 \end{array}$,

f) $\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -7 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array}$,
g) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -12 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 9 \end{array}$,

1. **a)** (2, -5), **b)** nemá řešení, **c)** (2, 0, -3), **d)** (1, 1, -1), **e)** (5, 2, 3), **f)** (1, 5, -3), g) (3, 4, 5),
h) nemá řešení.

1) Integrace substitucí:

5.11 Vypočtěte:

a) $\int 10x(x^2+13)^{12}\,\mathrm{d}x$

b) $\int 2\sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

c) $\int 5x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

e) $\int 3x\sqrt[4]{x^2+5}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{5}{2x-3}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{5}{(2x-3)^4}\,\mathrm{d}x$

5.12 Vypočtěte:

a) $\int (2x-5)^7\,\mathrm{d}x$

b) $\int 8x^2(x^3+2)^5\,\mathrm{d}x$

c) $\int 5x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{3x}{(x^2+4)^3}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{4}{7-5x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{5x}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$

5.13 Vypočtěte:

a) $\int \sin 7x\,\mathrm{d}x$

b) $\int 5k\cos\frac{8}{3}x\,\mathrm{d}x$

c) $\int 3e^{-x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int 2e^{3x-1}\,\mathrm{d}x$

5.14 Vypočtěte:

a) $\int 5xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int 3x^4 e^{-x^5+2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{3\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{7\ln^4 x}{x}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

f) $\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$

g) $\int \sin^3 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

h) $\int \sin^4 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

2) Per partes:

5.9 Vypočtěte:

a) $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$

b) $\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$

5.10 Vypočtěte:

a) $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

b) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

c) $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

d) $\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$

1. a) $\int x^2 \sin x \, dx$ b) $\int (2x+3)\cos 2x dx$ c) $\int 3x \cos\frac{x}{2} dx$

d) $\int xe^{2x} dx$ e) $\int \left(x^2+2x\right)e^{\frac{x}{3}} dx$ f) $\int x^2 2^{-x} dx$

2. a) $\int x^2 \ln x dx$ b) $\int 2x \operatorname{arctg} x dx$ c) $\int \sqrt{x} \ln 2x dx$

d) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$ e) $\int x \ln^2 x dx$ f) $\int 4x^3 \operatorname{arctg} x dx$

3. a) $\int \ln x dx$ b) $\int \ln^2 x dx$ c) $\int \operatorname{arctg} x dx$

d) $\int \operatorname{arccotg} x dx$ e) $\int \arcsin x dx$ f) $\int \arccos x dx$

Další úlohy:

Lineární závislost a nezávislost vektorů

7. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé a v kladném případě vyjádřete jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních:

a) a = (1, 2, 3), b = (3, 6, 7),

b) a = (4, -2, 6), b = (6, -3, 9),

c) a = (5, 4, 3), b = (3, 3, 2), c = (8, 1, 3),

d) a = (0, 1, 0, 3), b = (3, 0, 1, 0), c = (0, 3, 0, 1).

8. Určete číslo t tak, aby vektory **u**, v, w byly lineárně závislé:

a) u = (2, 1, 3), v = (1, 2, -5), w = (3, 0, t),

b) u = (1, 2, 2), v = (2, t, 3), w = (2, 5, 4),

c) u = (-1, t, 2), v = (1, 1, 2), w = (3, 0, t),

d) u = (4, 5, 2), v = (2, 2t, t), w = (2, 10-6t, 4-3t).

7. **a)** nezávislé, **b)** závislé, b = $\frac{3}{2}$a, **c)** závislé, c = 7a - 9b, **d)** nezávislé.

8. **a)** t = 11, **b)** neexistuje, **c)** $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, **d)** t libovolné.

Určitý integrál:

6.2 Vypočtěte:

a) $\int_0^1 x^3(1-x)^2\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{-3}^3 (4x^3 - x^2 + 2x - 5)\,\mathrm{d}x$

c) $\int_{-1}^2 (x^2 - x + 5)\,\mathrm{d}x$

d) $\int_2^4 (3x^2 - 4x + 1)\,\mathrm{d}x$

6.5 Vypočtěte:

a) $\int_0^1 3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^1 (3x^2 - 4\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left(-\frac{3}{x} + 2\right)\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}\,\mathrm{d}x$

6.6 Vypočtěte pomocí vhodné substituce:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$