14. hodina **MAE**

Počet variací *k*-té třídy z *n* prvků bez opakování

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Pro ilustraci uveďme všechny tříčlenné variace ze čtyř prvků a, b, c, d:

$$(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a),$$
$$(a,b,d),\ (a,d,b),\ (b,a,d),\ (b,d,a),\ (d,a,b),\ (d,b,a),$$
$$(a,c,d),\ (a,d,c),\ (c,a,d),\ (c,d,a),\ (d,a,c),\ (d,c,a),$$
$$(b,c,d),\ (b,d,c),\ (c,b,d),\ (c,d,b),\ (d,b,c),\ (d,c,b).$$

uspořádaná k-tice:	1. člen	2. člen	...	$(k-1)$-ní člen	k-tý člen
možnosti výběru z n prvků:	$\uparrow$ n	$\uparrow$ $n-1$		$\uparrow$ $n-(k-2)$	$\uparrow$ $n-(k-1)$

Podle kombinatorického pravidla součinu je počet všech těchto uspořádaných k-tic roven součinu

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Počet $V(k,n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Příklad 1

K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

a) Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.
b) Kolik z nich má modrý pruh?
c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed?
d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh?

1.9 Výbor sportovního klubu tvoří šest mužů a čtyři ženy. Určete:

a) kolika způsoby z nich lze vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře;
b) kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a) tak, aby ve funkci předsedy byl muž a ve funkci místopředsedy žena nebo obráceně;
c) kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a) tak, aby právě jedním z nich byla žena.

1.10 Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje dvanácti předmětům a každému nejvýše jednu vyučovací hodinu denně, má-li se skládat ze šesti vyučovacích hodin. V kolika z nich se vyskytuje daný předmět a v kolika z nich je tento předmět zařazen na 1. vyučovací hodinu?

B

1.11 Určete počet prvků, z nichž lze utvořit

a) 240 dvoučlenných variací;
b) dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných variací.

Příklad 1.1.2. Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

Kolik existuje trojciferných čísel, které lze zapsat užitím cifer 1, 2, 3, 4, 5.

Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.

Permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

Počet permutací n prvků bez opakování

$$P(n) = n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$$

Pro každé přirozené číslo n definujeme:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$0! = 1$$

Příklad 1

S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentě vystoupit šest poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet:

a) všech možných pořadí jejich vystoupení;

b) všech pořadí, v nichž vystupuje A po E;

c) všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po E.

Příklad 4

Zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{(2n)!}{(2n+1)!} + \dfrac{(3n-1)!}{(3n-2)!}$

b) $\dfrac{(n+1)!}{(n!)^2} + \dfrac{n!}{((n-1)!)^2}$

Příklad 5

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

$$n!(n+3)! > (n+1)!(n+2)!$$

Počet permutací n prvků s opakováním

$$P^*(n) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Jestliže se mezi n prvky vyskytuje: první prvek n_1 krát
druhý prvek n_2 krát
...
k-tý prvek n_k krát $\Rightarrow n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

Kolik různých šesticiferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 2, 3, 3, 3?

Počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním

$$V_k^*(n) = n^k$$

Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin po jedné až pěti?

Kombinace k-té třídy z n prvků

Poznámka

Vybíráme bez zřetele na uspořádání: tzn., že v daných n-ticích ***nezáleží*** *na pořadí prvků!*

Najděte všechny kombinace druhé třídy z množiny $M = \{1,2,3,4,5\}$

Odvoďte počet kombinací k-té třídy z n prvků

Počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování

$$C_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$