14. hodina ***(MA2-E)***

Opakování minulé hodiny

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Zaměříme se na **zkrácené rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty**, jejichž obecný tvar je

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0\ ,$$

kde a_0, a_1, a_2 jsou reálné koeficienty. Ukážeme nejprve zásadní skutečnost, že existují řešení této rovnice ve tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{rx}\ ,$$

kde r je zatím nespecifikovaná konstanta. Snadno určíme derivace

$$y'(x) = r\mathrm{e}^{rx}\ , \quad y''(x) = r^2\mathrm{e}^{rx}\ ,$$

které dosadíme do původní rovnice. Po vydělení výrazem e^{rx} dostáváme

$$a_2\, r^2 + a_1\, r + a_0 = 0\ ,$$

což je kvadratická rovnice pro neznámou r. Tento výsledek znamená, že funkce $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ bude řešením diferenciální rovnice právě tehdy, když r bude řešením příslušné algebraické rovnice.

Definice 9.2.1.

Kvadratickou rovnici $a_2\, r^2 + a_1\, r + a_0 = 0$ nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice $a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0$.

Věta 9.2.1.

Mějme lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0\,,$$

s charakteristickou rovnicí $\quad a_2\, r^2 + a_1\, r + a_0 = 0$.

(a) Má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny $r_1,\ r_2$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x},\ y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}\,, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Má-li charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen r, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{rx},\ y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{rx} + C_2 x \mathrm{e}^{rx} = \mathrm{e}^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right)\,, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\ + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 9.2.1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - r - 2 = 0$ má kořeny $r_1 = 2,\ r_2 = -1$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{2x},\ y_2 = \mathrm{e}^{-x}$, obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\ \mathrm{e}^{2x} + C_2\ \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Příklad 9.2.2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 4r + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $r = 2$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{2x}$, obecné řešení napíšeme například ve tvaru

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,x\mathrm{e}^{2x}\ .$$

Příklad 9.2.3. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 6r + 13 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $r_{1,2} = 3 \pm 2\mathrm{i}$. Fundamentální systém v reálném oboru budou podle tvrzení (c) předchozí věty tvořit funkce $y_1 = \mathrm{e}^{3x}\cos 2x$, $y_2 = \mathrm{e}^{3x}\sin 2x$, obecné řešení zapíšeme ve tvaru

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x}\cos 2x + C_2\mathrm{e}^{3x}\sin 2x.$$

Příklad 9.2.5. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 9y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 + 9 = 0$ má kořeny $r_1 = 3\mathrm{i}$, $r_2 = -3\mathrm{i}$. Fundamentální systém tvoří dvojice $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$, obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$y(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\ .$$

2. Najděte obecná řešení rovnic s konstantními koeficienty:

a) $4y'' - y = 0$, b) $y'' + 7y' + 10y = 0$,

c) $4y'' + y = 0$, d) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

3. Řešte počáteční úlohy:

a) $y'' - y' - 12y = 0$, $\quad y(0) = 5,\ y'(0) = -1$,

b) $y'' + y = 0$, $\quad y(\pi) = y'(\pi) = 2$,

c) $y'' + 4y' = 0$, $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = -12$.

Řešení:

2. a) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$, b) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-5x}$,

c) $y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}$, d) $y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

3. a) $y = 2e^{4x} + 3e^{-3x}$, b) $y = -2\cos x - 2\sin x$, c) $y = 3e^{-4x} - 3$.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty se speciální pravou stranou

MŮŽE BÝT VE ZKOUŠKOVÉ PÍSEMCE!

Naučili jsme se řešit rovnice tvaru:

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0\ ,$$

Teď budeme řešit rovnici tvaru:

$$a_2(x).y'' + a_1(x).y' + a_0(x).y = b(x)$$

kde $b(x) \neq 0$ a $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ jsou konstanty.

Postup bude následující:

- Nejdříve uhádneme podle určitého receptu (dále), jak bude vypadat určité speciální (partikulární) řešení diferenciální rovnice.
- Pak vyřešíme rovnici homogenní (na pravé straně je nula) již známými postupy.
- Nakonec sečteme homogenní a partikulární řešení a dostaneme obecné řešení rovnice.

Jak může vypadat partikulární řešení rovnice výše?

1) $\boldsymbol{b(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x}}$

kde $P_m(x)$ je polynom stupně m (nejvyšší mocnina je x^m)
Pak speciální řešení má tvar:

$$y_p = x^k e^{\alpha x} P'_m(x)$$

kde $P'_m(x)$ je nějaký polynom stupně nejvýše m (obecně ne stejný jako $P_m(x)$) a k je násobnost čísla α v charakteristické rovnici. Pokud α není kořenem rovnice, je $k = 0$ a $x^k = x^0 = 1$. Určíme polynom $P'_m(x)$.

2) $\boldsymbol{b(x) = e^{\alpha x}\,(P_{m1}(x)\cdot\cos\beta x + P_{m2}(x)\cdot\sin\beta x)}$

kde $P_{m1}(x)$ a $P_{m2}(x)$ mají maximální stupeň m (tzn. nejvyšší z obou polynomů má stupeň m).
Pak speciální řešení má tvar:

$$y_p = x^k e^{\alpha x}(P_{m3}(x)\cdot\cos\beta x + P_{m4}(x)\cdot\sin\beta x)$$

kde $P_{m3}(x)$ a $P_{m4}(x)$ je nějaký polynom stupně nejvýše m (obecně ne stejný jako $P_{m1}(x)$ a $P_{m2}(x)$) a k je násobnost kořene $\alpha + i\beta$ v charakteristické rovnici. Pokud $\alpha + i\beta$ není kořenem rovnice, je $k = 0$ a $x^k = x^0 = 1$. Určíme polynomy $P_{m3}(x)$ a $P_{m4}(x)$.

Pozn: případ

$$e^{\alpha x}\cdot P_{m1}(x)\cdot\cos\beta x$$

se nemusí diskutovat zvlášť, stačí zvolit $P_{m2}(x) = 0$.

Příklad 9.4.2. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 4y' - 5y = 5x - 6$.

Řešení:

$$y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} - x + 2\ .$$

Příklad 9.4.3. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 4y' - 5y = 26\cos x$.

Řešení:

$$y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} - 3\cos x - 2\sin x\ .$$

Příklad 9.4.4. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - y' - 12y = 7\mathrm{e}^{-3x}$.

Řešení:

$$y(x) = \hat{y} + v(x) = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} - x\mathrm{e}^{-3x}\ .$$

Další úlohy

1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 5y' + 6y = b(x)$, je-li

a) $b(x) = x^2 + 5x - 3$, b) $b(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$.

2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = b(x)$, je-li

a) $b(x) = x^3 + 1$, b) $b(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}$.

3. Najděte obecná řešení rovnic:

a) $y'' - 2y' + 10y = 26\sin 2x$, b) $4y'' - 4y' + y = 17\cos 2x$.

Řešení:

1. $y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + v(x)$, kde

a) $v(x) = \frac{1}{54}(9x^2 + 30x - 55)$, b) $v(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\mathrm{e}^{-2x}$.

2. $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2x\mathrm{e}^{2x} + v(x)$, kde

a) $v(x) = \frac{1}{8}(2x^3 + 6x^2 + 9x + 8)$, b) $v(x) = (x+3)\mathrm{e}^{x}$.

3. a) $y = \mathrm{e}^{x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + 2\cos 2x + 3\sin 2x$,

b) $y = C_1\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{15}{17}\cos 2x - \frac{8}{17}\sin 2x$.