1) Matematická logika

Výrokem nazveme každou vyslovenou nebo napsanou myšlenku, o níž má smysl říci, že je buď pravdivá nebo nepravdivá. Výrokem může tedy být pouze věta oznamovací. Výroky budeme označovat velkými písmeny A, B, ... , jejich ***pravdivostní hodnotu,*** tj. pravdivost, resp. nepravdivost výroku, označíme symbolem (číslicí) 1, resp. 0.

Hypotézou nazveme výrok, jehož pravdivostní hodnotu zatím neznáme; pokoušíme se ji odvodit logickými operacemi z jiných pravdivých výroků.

Tautologie je výroková formule, která nabývá ve všech případech pravdivostní hodnoty 1.

Výroková forma S(x) je slovní vyjádření, v němž se vyskytuje proměnná x. Toto vyjádření má tu vlastnost, že se stane výrokem, jestliže proměnnou nahradíme prvky jisté množiny, kterou označíme D a nazveme ***definičním oborem*** výrokové formy S(x). Množinu všech prvků, pro něž je S(x) pravdivým výrokem, nazveme ***oborem pravdivosti*** výrokové formy S(x) a označíme P.

2) Množiny

Průnik množin A, B definujeme jako množinu všech prvků, které jsou společné oběma množinám A, B. Průnik množin A, B označujeme $A \cap B$. Platí tedy

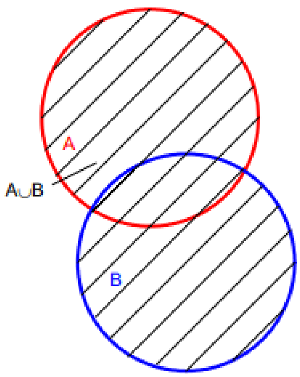
$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. Dvě množiny A, B, pro něž platí $A \cap B = \emptyset$, nazýváme ***disjunktními množinami***.

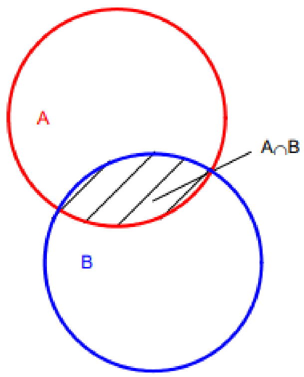
Sjednocení množin A, B definujeme jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny prvky množiny A a právě všechny prvky množiny B. Sjednocení množin A, B označujeme $A \cup B$. Platí tedy $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

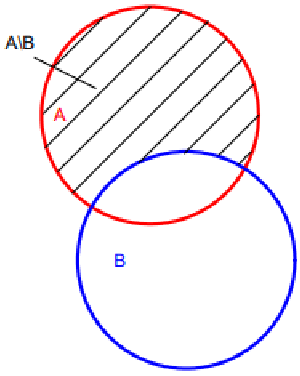
Rozdíl množin A, B v daném pořadí definujeme jako množinu všech prvků, které jsou prvky množiny A a nejsou prvky množiny B. Rozdíl množin A, B označujeme A - B nebo $A \setminus B$. Platí tedy $A - B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.

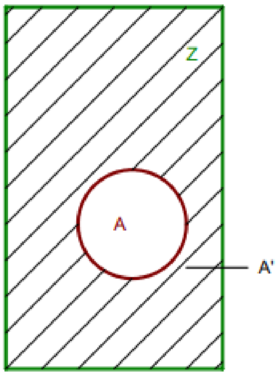
Doplněk množiny A ***v množině*** Z. Nechť $A \subset Z$. Doplňkem množiny A v množině Z nazýváme podmnožinu množiny Z, která obsahuje prvky, které nepatří do množiny A. Označujeme A' a platí

$$A' = Z - A = \{x : (x \in Z) \wedge (x \notin A)\}.$$









1. Utvořte všechny podmnožiny množiny M = {3, -4, 5}.

2. Stanovte, kolik podmnožin má množina A = {O, 1, 2, 3}, zobecněte pro případ, kdy množina A má n prvků.

3. Jsou dány množiny A = {1, 2, 4, 7, 11, 16}, B = {1, 3, 7, 13}, C = {1, 6, 11, 19}. Určete a) $A \cup B$, b) $B \cup C$, c) $A \cup B \cup C$, d) $A \cap B$ e) $A \cap C$, f) $A \cap B \cap C$, g) A - B.

4. Uvažte, zda a) množina úhlů v trojúhelníku je podmnožinou množiny trojúhelníků, b) množina prvočísel je podmnožinou množiny lichých čísel, c) množina lichých čísel je podmnožinou množiny prvočísel, d) množina rovnostranných trojúhelníků je podmnožinou množiny rovnoramenných trojúhelníků.

5. Je možné, aby někdy platilo a) A - B = A, b) A - B = $\varnothing$?

6. Určete prvky množin A, B, C, které jsou definovány ve tvaru $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : (x - 1)^2 = 0\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 2x^2 - x = -2\}$.

7. Najděte množinu, kterou tvoří všechna řešení rovnice a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$, b) $\sin \pi x = 0$.

8. Základní množina je Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} a množiny A = {1, 3, 5, 7}, B = {2, 4, 6, 8}, C = {3, 4, 7, 8}. Určete a) $A \cup B'$, b) $A' \cap B$, c) $B' \cap C$.

1. Který ze vztahů platí pro množiny **Z** celých a **R** racionálních čísel:

   a) $\mathbf{Z} = \mathbf{R}$, b) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, c) $\mathbf{R} \subset \mathbf{Z}$.

2. Existují celá čísla, která jsou nekladná i nezáporná, která to jsou:

   a) všechna, b) neexistují, c) ano, 0.

3. Kolik různých racionálních čísel je zapsáno: $\frac{18}{8}$; $2\frac{2}{8}$; 2,25; $\frac{9}{4}$; $\frac{126}{56}$; $\frac{-72}{-32}$; $2+\frac{1}{4}$:

   a) 0, b) 1, c) 2.

4. Pro který interval platí $\forall x \in \mathbf{R} : a \le x < b$:

   a) polootevřený $(a, b >$, b) uzavřený $< a, b >$, c) polozavřený $< a, b)$.

5. Patří vztah $|ab| = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi$ mezi vlastnostmi absolutní hodnoty reálných čísel a, b:

   a) ano, b) ne, c) ano, je-li $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

6. Pro infimum číselné množiny M platí jedna z vlastností:

   a) $\forall x \in M$ platí $x \ge \inf M$, b) $\forall x \in M$ platí $x < \inf M$, c) $\exists x \in M$, tak, že platí $x < \inf M$.

3) Maximum, Minimum, Supremum, Infimum

Supremum a infimum množiny

Neprázdná číselná množina M se nazývá:

1. ***ohraničená shora***, existuje-li takové číslo h $\in$ **R**, zvané *horní závora množiny* M, že pro $\forall$ x $\in$ M je x $\leq$ h ,

2. ***ohraničená zdola***, existuje-li takové číslo d $\in$ **R**, zvané *dolní závora množiny* M, že pro $\forall$ x $\in$ M je x $\geq$ d ,

3. ***ohraničená***, je-li ohraničená shora i zdola,

4. ***neohraničená***, není-li ohraničená shora nebo zdola. Místo ***ohraničená*** se také používá názvu ***omezená***.

Největší, resp. nejmenší číslo množiny M se nazývá ***maximum***, resp. ***minimum*** množiny M, označujeme max M, resp. min M.

Definujeme nyní supremum a infimum množiny M.

1. Má-li neprázdná číselná množina M *nejmenší horní závoru* h, pak se číslo h nazývá ***supremum množiny*** M a značí se sup M.

2. Má-li neprázdná číselná množina M *největší dolní závoru* d, pak se číslo d nazývá ***infimum množiny*** M a značí se inf M.

1. ***Supremum číselné množiny*** M ***má tyto dvě vlastnosti***:

a) Pro každé číslo x $\in$ M platí x $\leq$ sup M,

b) v každém levém okolí suprema leží aspoň jedno číslo x $\in$ M.

2. ***Infimum číselné množiny*** M ***má tyto dvě vlastnosti:***

a) Pro každé číslo x $\in$ M platí x $\geq$ inf M,

b) v každém pravém okolí infima leží alespoň jedno číslo x $\in$ M.

Určete maximum, minimum, supremum a infimum následujících množin:

$$A_1 = (-7,2\rangle$$
$$A_2 = \langle -3, 1\rangle \cup \langle 4,\ 5)$$
$$A_3 = \langle 0, 1\rangle \cup \langle 4,\ \infty)$$
$$A_4 = \langle -3, 1\rangle \cup \langle 4,\ 8\rangle$$

1. Určete maximální ciferný součet trojciferného čísla:

   a) 999,   b) 27,   c) 1000.

2. Určete, pro která reálná čísla x má interval $< \frac{x-1}{2}, 3 >$ neprázdný průnik s intervalem $(-\infty, x+2)$:

   a) $x \in (-5, 7>$,   b) $x \in (-5, \infty)$,   c) $x \in (-\infty, 7>$.

3. Zapište pomocí intervalů množinu reálných čísel, která vyhovují výrazu:

   $V = \sqrt{\frac{3}{x-2}} + \sqrt{3-x} + \frac{x}{6}$:

   a) $(2, \infty)$,   b) $(2, 3)$,   c) $(2, 3>$.

4. Určete, zda existuje minimum množiny $M = \left\{ \frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbf{N} \right\}$:

   a) existuje,   b) neexistuje,   c) nelze určit.

3. Kterým reálným číslům vyhovují následující výrazy ? Zapište pomocí intervalů!

a) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$,   b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}$,   c) $\frac{3}{4-x^2}$.

4. Najděte maximum, minimum, supremum, infimum množin (pokud existují):

a) (0, 1),

b) < 0, 1>,

c) množina všech záporných čísel.

1. Najděte definiční obor funkce $y = \ln(x+4)$:

a) $\langle 0,\infty)$, b) $(-4,\infty)$, c) $\langle -4,\infty)$, d) $(-\infty,-4)$.

2. Najděte definiční obor funkce $y = \sqrt{16-4x^2}$:

a) $(-2,2)$, b) $\langle -4,4\rangle$, c) $\langle -2,2\rangle$, d) $(-4,4)$.

3. Najděte definiční obor funkce $y = \dfrac{x+4}{x-5}$:

a) $(5,\infty)$, b) $(-\infty,5)\cup(5,\infty)$, c) $(-\infty,-5)\cup(5,\infty)$, d) $\langle -5,5\rangle$.

4. Najděte definiční obor funkce $y = \operatorname{tg} 3x$:

a) $x \neq \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}$, b) $\mathbf{R}$, c) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, d) $(-3,3)$.

5. Najděte definiční obor funkce $y = \sqrt[3]{x^2-4x+3}$:

a) $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$, b) $(1,3)$, c) $\mathbf{R}$, d) $\langle 1,3\rangle$.