MA2-E (2. hodina)

Vektory a vektorový prostor

Definice. Jsou dány dva n-složkové vektory $\vec{v}, \vec{w}$ a reálné číslo r. Definujeme následující početní *operace* (úkony) s vektory:

součet vektorů	$\vec{v} + \vec{w}$	složky výsledku se vypočtou jako $v_i + w_i$
rozdíl vektorů	$\vec{v} - \vec{w}$	složky výsledku se vypočtou jako $v_i - w_i$
r-násobek vektoru	$r \cdot \vec{v}$	složky výsledku se vypočtou jako $r \cdot v_i$
skalární součin vektorů	$\vec{v} \cdot \vec{w}$	výsledek je číslo $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n$
norma vektoru	$\|\vec{v}\|$	výsledek je číslo $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$
dělení vektorů	- - -	**není definováno**

Ukázky: Pro čtyřsložkové vektory $\vec{v} = (1, 2, 6, -1)$, $\vec{w} = (0, 4, -3, 0)$ bude $\vec{v} + \vec{w} = (1, 6, 3, -1)$, $2\vec{v} - \vec{w} = (2, 0, 15, -2)$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 = -10$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

Příklad Množina $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}, \text{ kde } i = 1, \ldots, n; n \in \mathbf{N}\}$, v níž jsou operace definovány vztahy

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$,

$k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$, $k \in \mathbf{R}$,

je vektorový prostor, jehož prvky, vektory, jsou uspořádané n-tice reálných čísel

$(x_1, \ldots, x_n)$.

Definice. *Množina V_n všech uspořádaných n-tic reálných čísel, na které jsou definovány operace sčítání a násobení reálným číslem vztahy*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \quad c\,\boldsymbol{a} = (c\,a_1, \ldots, c\,a_n),$$

se nazývá aritmetický lineární prostor. Prvky V_n, tj. uspořádané n-tice reálných čísel, se nazývají aritmetické vektory.

Definice 2.1.2.

Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ nazýváme **lineárně nezávislé**, jestliže rovnice

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = o \qquad (1)$$

je splněna pouze v případě, že skaláry $c_1, \dots, c_n$ jsou všechny rovny 0. Jestliže je rovnice (1) splněna a alespoň jeden ze skalárů $c_1, \dots, c_n$ je různý od nuly, říkáme, že vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou **lineárně závislé.**

Příklad Vektory (1, 1, 1), (1, 1, 0) a (1, 0, 0) jsou lineárně nezávislé. Najít čísla c_1, c_2, c_3 splňující rovnici

$$c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0) = (c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2, c_1) = (0, 0, 0)$$

vede k řešení soustavy

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 &= 0, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$.

Příklad Vektory (1, 2, 4), (2, 1, 3) a (4, -1, 1) jsou lineárně závislé. Nalezení čísel c_1, c_2, c_3 splňujících rovnici

$$c_1(1, 2, 4) + c_2(2, 1, 3) + c_3(4, -1, 1) = (c_1 + 2c_2 + 4c_3, 2c_1 + c_2 - c_3, 4c_1 + 3c_2 + c_3) = (0, 0, 0)$$

vede nyní k řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 4c_3 &= 0, \\ 2c_1 + c_2 - c_3 &= 0, \\ 4c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0, \end{aligned}$$

která má například řešení $c_1 = 2$, $c_2 = -3$, $c_3 = 1$. Takových řešení je nekonečně mnoho tvaru $c_1 = 2t$, $c_2 = -3t$, $c_3 = t$, $t \in \mathbf{R}$.

Definice 2.1.3.

Vektorový prostor V se nazývá **n-dimenzionální** nebo také **prostor dimenze n** ($n > 0$), existuje-li ve V n lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ a platí-li, že každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Definice 2.1.4.

Každou množinu n lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V_n$ nazýváme **bází** ve V_n a zapisujeme $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n >$.

Příklad Určete souřadnice vektoru $\mathbf{a} = (1, 2)$ z $V_2 = \mathbf{R}^2$

a) vzhledem k bázi $< (1, 1), (-1, 0) >$,

b) vzhledem k bázi $< (1, 0), (0, 1) >$.

Definice 2.1.5.

Jestliže $V' \subset V$ a jsou splněny podmínky:

(1) $kx \in V'$ pro všechna $x \in V'$ a $k \in \mathbf{R}$,

(2) $x + y \in V'$ pro všechna $x, y \in V'$,

pak V' nazveme vektorovým **podprostorem** vektorového prostoru V.

Příklad Nechť $V' = \{(x, 1); x \in \mathbf{R}\}$, pak V' není podprostorem prostoru $\mathbf{R}^2$.

Platí:

(1) $k(x, 1) = (kx, k) \notin V'$, pro $x \in \mathbf{R}$,

(2) $(x, 1) + (y, 1) = (x + y, 2) \notin V'$, pro $x, y \in \mathbf{R}$.

1. Určete aritmetický vektor x , pro který platí:

a) $x = 3a + 5b - c$, je-li $a = (4, 1, 3, -2)$, $b = (1, 2, -3, 2)$, $c = (16, 9, 1, -3)$,

b) $x = -a + 4b - 6c + 2d$, je-li $a = (1, 1, -1, -1)$, $b = (0, 0, 0, 0)$, $c = (\frac{1}{2}, 0, 1, 4)$, $d = (-1, -1, 1, 1)$,

6. Najděte všechny hodnoty t, pro které je možno vektor u vyjádřit jako lineární kombinace vektorů a, b, c :

a) u = (5, 3, t), a = (1, 0, 2), b = (0, 1, 1), c = (4, 1, 9),

b) u = (4, 3, t), a = (1, 2, 3), b = (2, -1, 1), c = (1, 7, 8),

c) u = (t, 6, 7), a = (1, 4, 5), b = (3, 8, 10), c = (0, -4, -5),

d) u = (1, 3, 5), a = (1, 3, 4), b = (2, 8, -2), c = (3, 11, t).

7. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé a v kladném případě vyjádřete jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních:

a) a = (1, 2, 3), b = (3, 6, 7),

b) a = (4, -2, 6), b = (6, -3, 9),

c) a = (5, 4, 3), b = (3, 3, 2), c = (8, 1, 3),

d) a = (0, 1, 0, 3), b = (3, 0, 1, 0), c = (0, 3, 0, 1).

8. Určete číslo t tak, aby vektory **u**, v, w byly lineárně závislé:

a) u = (2, 1, 3), v = (1, 2, -5), w = (3, 0, t),

b) u = (1, 2, 2), v = (2, t, 3), w = (2, 5, 4),

c) u = (-1, t, 2), v = (1, 1, 2), w = (3, 0, t),

d) u = (4, 5, 2), v = (2, 2t, t), w = (2, 10-6t, 4-3t).

9. Nechť V je vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých v daném intervalu. Zjistěte, zda jsou funkce (vektory) v daném intervalu lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $a = e^x$, $b = x$, $x \in \mathbf{R}$,

b) $a = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, $b = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$, $c = x^2 + x - 2$, $x \in \mathbf{R}$,

c) $a = \sin x$, $b = \cos x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

d) $a = 2\cos^2 x$, $b = -\cos 2x$, $c = -1$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

10. Mezi danými vektory najděte maximální počet lineárně nezávislých a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci:

a) $a = (1, 2, 0, 0)$, $b = (1, 2, 2, 4)$, $c = (3, 6, 0, 0)$,

b) $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 3, 4)$, $c = (3, 2, 3)$, $d = (4, 3, 4)$, $e = (1, 1, 1)$,

c) $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (2, 1, 1, -1)$, $w = (1, -1, 0, -1)$, $x = (1, 0, -1, 2)$.

11. Zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$. V kladném případě vyjádřete vektor $a = (1, 1, 2)$ jako jejich lineární kombinaci a stanovte souřadnice vektoru a v dané bázi:

a) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (2, 0, 0)$,

b) $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (0, 2, -2)$, $u_3 = (1, 1, 3)$,

Řešení některých úloh:

6. **a)** $t = 13$, **b)** $t = 7$, **c)** pro žádné t, **d)** $t \neq 2$.

7. **a)** nezávislé, **b)** závislé, $b = \frac{3}{2}a$, **c)** závislé, $c = 7a - 9b$, **d)** nezávislé.

8. **a)** $t = 11$, **b)** neexistuje, **c)** $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, **d)** t libovolné.