MA2-E (3. hodina)

Matice

Definice. Jsou dány dvě matice A, B stejného typu $m \times n$ a reálné číslo r. Definujeme následující početní *operace* (úkony):

součet matic	$A + B$	prvky výsledku se vypočtou jako $a_{ij} + b_{ij}$
rozdíl matic	$A - B$	prvky výsledku se vypočtou jako $a_{ij} - b_{ij}$
r-násobek matice	$r \cdot A$	prvky výsledku se vypočtou jako $r \cdot a_{ij}$
matice *transponovaná*	A^{T}	výsledkem je matice typu $n \times m$, kde $a^{\mathrm{T}}_{ij} = a_{ji}$

Ukázky: Pro matice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ bude

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3.2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0.8 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad 2A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Sečtěte matice A + B a M + N jestliže platí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice

Definice 2.4.3.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n). Považujme řádky za aritmetické vektory vektorového prostoru V_n. **Hodnost matice $\mathbf{A}$** je r (značíme $h(\mathbf{A}) = r$), existuje-li r lineárně nezávislých řádků matice $\mathbf{A}$ a každých r+1 řádků je lineárně závislých.

Věta 2.4.2. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná matice typu (m, n). Hodnost matice $\mathbf{A}$ se nezmění při kterékoliv z následujících elementárních úprav:

1. záměně pořadí řádků (sloupců),
2. násobení jednotlivých řádků (sloupců) čísly $k_i \neq 0$,
3. přičtení k některému řádku (sloupci) lineární kombinace zbývajících řádků (sloupců),
4. vynecháním řádku, který je lineární kombinací zbývajících řádků.

Důkaz: Žádná z uvedených úprav nemění počet lineárně nezávislých řádků či sloupců.

Hodnost matice získáme tak, že upravíme matici na trojúhelníkový tvar. Počet nenulových řádků je roven hodnosti.

Příklad Určeme hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Budeme upravovat matici $\mathbf{A}$ podle věty 2. Ke 2. řádku přičteme (-1) násobek 1. řádku a ke 4. řádku (-2) násobek 2. řádku

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(-1) \\ \\ .(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

3. a 4. řádek můžeme vynechat (dle 4. bodu věty 2).

Je vidět, že v upravené matici jsou dva lineárně nezávislé řádky, tzn., že hodnost matice $\mathbf{A}$ je dvě, $h(\mathbf{A}) = 2$.

4. Vypočtěte hodnost matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ -7 & 10 & -20 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \\ 5 & -10 & 15 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení

4. a) $h(\mathbf{A}) = 2$, b) $h(\mathbf{B}) = 2$, c) $h(\mathbf{C}) = 2$, d) $h(\mathbf{D}) = 1$, e) $h(\mathbf{M}) = 3$, f) $h(\mathbf{F}) = 3$.

24. Gaussovu metodou řešte soustavu rovnic:

$$2x + 3y = 9$$
$$\underline{x - y = 2}$$

Věta 2.5.2. **(Frobeniova).** Soustava rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ má řešení, právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. Označíme-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = r$ a $\mathbf{A}$ je typu (m, n), pak v případě $r = n$ (n počet neznámých) má soustava jediné řešení a v případě $n > r$ má soustava nekonečně mnoho řešení, která můžeme zapsat pomocí $(n - r)$ parametrů.

Důkaz je obtížný a nebudeme jej provádět.

Jinak řečeno:

Věta (o počtu řešení soustavy). *Nechť soustava lineárních rovnic (S) má řešení, h je hodnost matice soustavy a n je počet neznámých. Potom platí:*
(a) *Jestliže $h = n$, pak má soustava (S) právě jedno řešení.*
(b) *Jestliže $h < n$, pak má soustava (S) nekonečně mnoho řešení, přičemž za $n - h$ neznámých lze volit libovolná reálná čísla a ostatní neznámé jsou určeny jednoznačně.*

Ještě jinak řečeno (lidově): pokud se vám objeví řádek: $(0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0|c)$ kde $c \neq 0$, soustava nemá řešení. Ve všech ostatních případech má alespoň jedno řešení.

Gaussova eliminace:

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ 5x_3 &= -7 \\ x_1 &+ 3x_2 &+ x_3 &= 5 \\ 2x_1 &+ x_2 &+ x_3 &= 2 \\ 2x_1 &+ 3x_2 &- 3x_3 &= 14\,. \end{aligned}$$

A	**B**	Σ	úpravy
1 1 5	−7	0	
1 3 1	5	10	$r_2 - r_1$
2 1 1	2	6	$r_3 - 2r_1$
2 3 −3	14	16	$r_4 - 2r_1$
1 1 5	−7	0	
0 2 −4	12	10	
0 −1 −9	16	6	$2r_3 + r_2$
0 1 −13	28	16	$2r_4 - r_2$
1 1 5	−7	0	
0 2 −4	12	10	
0 0 −22	44	22	
0 0 −22	44	22	$r_4 - r_3$
1 1 5	−7	0	
0 2 −4	12	10	
0 0 −22	44	22	
0 0 0	0	0	

https://www.priklady.eu/cs/matematika/matice.alej

25. Řešte soustavu rovnic Gaussovu metodou:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= 8 \\ x - 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

26. Řešte soustavu rovnic Gaussovu metodou:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 5 \end{aligned}$$

27. Řešte soustavu rovnic Gaussovu metodou:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

1. Řešte různými způsoby soustavy lineárních rovnic

a) $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 7 \end{array}$, b) $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 6y & = & 4 \\ 3x & - & 9y & = & 1 \end{array}$, c) $\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & y & + & 2z & = & 4 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 9 \\ -4x & + & 2y & + & 3z & = & -17 \end{array}$,

d) $\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 2y & + & 6z & = & -4 \\ 7x & + & 5y & - & 2z & = & 14 \\ 2x & - & 8y & + & 5z & = & -11 \\ -3x & - & 3y & - & 7z & = & 1 \end{array}$, e) $\begin{array}{rcrcrcr} 6x & - & 3y & & & = & 24 \\ & & 4y & - & 7z & = & -13 \\ 5x & & & + & 6z & = & 43 \end{array}$,

f) $\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -7 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array}$, g) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -12 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 9 \end{array}$,

Řešení:

1. a) (2, -5), **b)** nemá řešení, **c)** (2, 0, -3), **d)** (1, 1, -1), **e)** (5, 2, 3), **f)** (1, 5, -3), g) (3, 4, 5), **h)** nemá řešení.