5. hodina (MA2-E)

1) Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 &+ a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 &+ \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1} x_1 &+ \dots + a_{mn} x_n = b_m ,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Jestliže zavedeme matice

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},
$$

lze soustavu (1) psát ve tvaru $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **matice soustavy**

Možné řešení:

Vynásobíme rovnici $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$ zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ a dostaneme

$\mathbf{A}^{-1} . \mathbf{A} . \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{B}$ a tedy $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{B}$.

Příklad Řešme soustavu pomocí inverzní matice.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -7 \\
2x_1 \qquad + x_3 &= 1 \\
4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -11 .
\end{aligned}
$$

Řešení:

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -2 & 11 & -5 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{B} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -2 & 11 & -5 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 32 \\ 80 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.
$$

https://www.priklady.eu/cs/matematika/matice.alej

19. Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 12 \end{aligned}$$

---

20. Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} y - z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= 6 \\ 4x - 4y + 5z &= 11 \end{aligned}$$

2) Determinanty

Definice 2.3.1.

Determinantem (řádu n) **čtvercové matice $\mathbf{A}$** řádu n, jejímiž prvky a_{ij} jsou reálná (popř. komplexní) čísla, nazýváme ***číslo***, které značíme ***det*** $\mathbf{A}$; $|\mathbf{A}|$ a definujeme takto:

1. Je-li n = 1, pak det $\mathbf{A} = a_{11}$.
2. Pro $n \geq 2$ je

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \mathbf{A}_{1j} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

kde matice $\mathbf{A}_{1j}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním prvního řádku a j-tého sloupce.

Determinant můžete spočítat podle libovolného řádku nebo sloupečku. Výše je ukázán výpočet podle prvního řádku. Řádek nebo sloupeček volíme tak, aby byl výpočet co nejsnazší (hodně nul). Před výpočtem také můžeme matici upravit tak, aby byl výpočet jednodušší. Tyto úpravy nesmí ale změnit hodnotu determinantu. Tuto podmínku splňuje například odečtení nebo přičtení jednoho řádku ke druhému.

1. Pro matici $\mathbf{A}$ řádu n = 2 platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

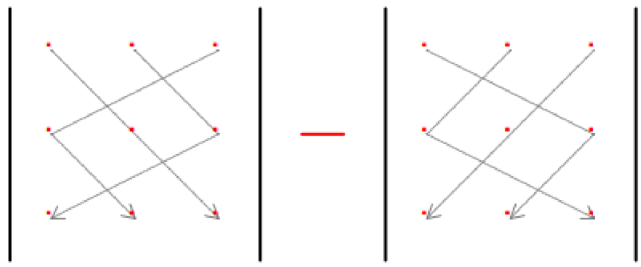
2. Pro matici $\mathbf{A}$ řádu n = 3 platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Tento výpočet si snadno zapamatujeme podle tzv. ***Sarrusova pravidla***:



Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Úpravy, které mění hodnotu determinantu určitým způsobem:

Věta 2.3.2. Jestliže matice $\mathbf{B}$ vznikne tak, že některý řádek (sloupec) čtvercové matice $\mathbf{A}$ vynásobíme číslem $k \in \mathbf{R}$, pak platí $\det \mathbf{B} = k.\det \mathbf{A}$.

Věta 2.3.3. Vyměníme-li ve čtvercové matici $\mathbf{A}$ navzájem dva řádky (sloupce), pak pro takto vzniklou matici $\mathbf{B}$ platí: $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

Další fakta:

Věta 2.3.4. Má-li matice $\mathbf{A}$ dva řádky (sloupce) stejné, pak $\det \mathbf{A} = 0$.

Důkaz plyne z předcházející věty 3, když oba stejné řádky mezi sebou vyměníme. Dostaneme

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A} \Rightarrow 2 \det \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0.$$

Věta 2.3.5. Nechť matice $\mathbf{B}$ vznikne tak, že k p-tému řádku (sloupci) čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n přičteme k násobek, $k \in \mathbf{R}$, q-tého řádku (sloupce), $p \neq q$. Pak platí

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}.$$

Příklad Vypočtěme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Výhodné bude využít rozvoj podle 4. sloupce. Nejdříve 2. řádek násobený číslem (-3) přičteme k řádku třetímu a 2. řádek přičteme k řádku čtvrtému. První a druhý řádek opíšeme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ (-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -7 & -5 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nyní provedeme rozvoj podle 4. sloupce :

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{2+4} \,.\, 1 \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tento determinant můžeme vypočíst přímo Sarrusovým pravidlem nebo opět rozvojem podle 3. sloupce po úpravách.

1. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{24} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{6} \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a-2 \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}x & -1 \\ 1 & \mathrm{tg}x \end{vmatrix}$.

2. Vypočtěte determinanty pomocí Sarrusova pravidla:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$.

4. Vypočtěte determinanty úpravou na trojúhelníkový tvar:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

5. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & 8 \\ -3 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & -2 \\ -9 & 6 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & 10 & -12 \end{vmatrix}$.

1. **a)** -17, **b)** 10, **c)** 22, **d)** $\sqrt{3}$, **e)** $\frac{9}{2}$, **f)** (1 - 2a), g) $\frac{1}{\cos^2 x}$.

2. **a)** -8, **b)** 50, **c)** -18, **d)** -43, **e)** -125, **f)** $(- x^2 + x)$.

4. **a)** 1, **b)** 0, **c)** -6.

5. **a)** 10, **b)** 6, **c)** 1, **d)** 1, **e)** -40, **f)** 24.