

Derivace elementárních funkcí

Derivace elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	<i>pozn.</i>
c	0	$c = \text{const.}$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
x^x	$x^x(1 + \ln x)$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$= -(\operatorname{arccot} x)'$

Derivace součinu

Derivaci součinu počítáme podle vztahu:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Případ, kde použijeme derivaci součinu protože nám nic jiného nezbyvá).

$$[x^2 \cdot \sin x]' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

Případ, kde nepoužijeme derivaci součinu (protože existuje jednodušší varianta).

$$[x^2 \cdot (x+5)]' = [x^3 + 5x^2]' = 3x^2 + 10x$$

Pokud bychom to přece jenom zkusili, museli bychom udělat o jednu úpravu víc.

$$[x^2 \cdot (x+5)]' = 2x(x+5) + x^2 \cdot 1 = 2x^2 + 10x + x^2 = 3x^2 + 10x$$

Derivace podílu

Derivaci podílu funkcí vypočítáme podle vztahu

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left[\frac{x+3}{x^2+1} \right]' = \frac{(x+3)'(x^2+1) - (x+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x+3)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-6x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}$$

Příklad 4

Vypočtete derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $y = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ | b) $y = 5x^2 \cos x + 7$ |
| c) $y = \frac{x^2}{x+1}$ | d) $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ |
| e) $y = \frac{x^3 - x + 2}{x^2}$ | f) $y = x^2 - \frac{1}{x^3}$ |

Derivace složené funkce

Def.: Jestliže funkce $z = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a jestliže funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má **složená funkce $y = f(g(x))$ derivaci v bodě x_0** a platí:

$$\left[f(g(x_0)) \right]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Příklad 5

Vypočtete derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = (x^5 + 2x + 1)^7$

b) $y = \sin^2(x^2 - 3x)$

Příklad 6

Vypočtete derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = \frac{x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

b) $y = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

c) $y = 2x\sqrt{1-x^2}$

d) $y = \frac{x^2}{(2-x)^2}$

<https://www.priklady.eu/cs/matematika.alej>

1.

Derivujte a upravte funkce:

1.) $y = (x^3 - 2)^5$ 2.) $y = \frac{1}{(5 - 2x)^2}$

3.) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3}$ 4.) $y = \sqrt{8 - \frac{1}{x^2}}$

3.

Derivujte a upravte funkce:

10.) $y = e^{\frac{x}{2}}$ 11.) $y = e^{1+\cos x}$

12.) $y = e^{\sqrt{x}}$ 13.) $y = \sin(e^x + \pi)$

Derivujete funkce

$$y = e^x$$

$$y = x^x$$

$$y = x^{x^2}$$

$$y = x^{x^x}$$

Pozn. Jaký je rozdíl mezi:

$$x^{x^x}$$

a

$$(x^x)^x$$