6. hodina *(MA2-E)*

Výpočet inverzní matice pomocí determinantu

1. *Determinant matice $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme subdeterminantem vzhledem k prvku a_{ij}.*

2. *Součin $(-1)^{i+j}$. det $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} a značíme*

Věta 2.4.1.

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n \geq 2$ a $\mathbf{A}^*$ je matice utvořená z algebraických doplňků $\mathbf{A}^*_{ik}$ prvků $a_{ik} \in \mathbf{A}$. Pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A}^*)^T.$$

Matici $(\mathbf{A}^*)^T$ nazýváme ***adjungovanou*** maticí k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\widetilde{\mathbf{A}}$, tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}.$$

Příklad Určeme inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{matice } \mathbf{A} \text{ je regulární}$$

$$\mathbf{A}_{11}^{*} = (-1)^{2}\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix} = 18 \qquad \mathbf{A}_{12}^{*} = (-1)^{3}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix} = -24 \qquad \mathbf{A}_{13}^{*} = (-1)^{4}\begin{vmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 6$$

$$\mathbf{A}_{21}^{*} = (-1)^{3}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 5\end{vmatrix} = -10 \qquad \mathbf{A}_{22}^{*} = (-1)^{4}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 5\end{vmatrix} = 15 \qquad \mathbf{A}_{23}^{*} = (-1)^{5}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbf{A}_{31}^{*} = (-1)^{4}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix} = 2 \qquad \mathbf{A}_{32}^{*} = (-1)^{5}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix} = -3 \qquad \mathbf{A}_{33}^{*} = (-1)^{6}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix} = 2$$

$$\mathbf{A}^{*} = \begin{pmatrix}18 & -24 & 6\\ -10 & 15 & -4\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{*})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}18 & -10 & 2\\ -24 & 15 & -3\\ 6 & -4 & 2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}18 & -10 & 2\\ -24 & 15 & -3\\ 6 & -4 & 2\end{pmatrix}.$$

1. Vypočítejte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ a proveďte zkoušku:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}-3 & 5\\ 6 & -4\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$,

j) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -24 & 3 \\ -44 & 15 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

1. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje (det $\mathbf{A} = 0$), e) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

2. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{X} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}$.

Vlastní číslo a vlastní vektor

Definice 2.6.1.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice řádu n, kde $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristické číslo** matice $\mathbf{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ tak, že

$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristický vektor** příslušný k λ.

Příklad Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pak

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\,\mathbf{x}.$$

To znamená, že $\lambda = 3$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x} = (2, 1)^T$ je vlastní vektor příslušný k $\lambda =$ $= 3$. Zřejmě také každý nenulový násobek vektoru $\mathbf{x}$ je vlastním vektorem

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{x}, \qquad (1)$$

Rovnici (1) můžeme zapsat ve tvaru

$$(\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{E})\, \mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což představuje soustavu homogenních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc}
(a_{11} - \lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & (a_{22} - \lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0
\end{array},$$

která má netriviální řešení, právě když $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Vypočteme-li předchozí determinant, získáme polynom $p(\lambda)$ stupně n. Tento polynom se nazývá ***charakteristickým polynomem*** a rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, ***charakteristickou rovnicí*** matice $\mathbf{A}$. Řešením rovnice $p(\lambda) = 0$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Tak dostaneme n, ne nutně různých, vlastních čísel matice $\mathbf{A}$.

Příklad Určeme vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice má tvar $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Dostaneme $(2 - \lambda)(-2 - \lambda)(2 -\lambda) - 6 - (-2 - \lambda) + 6(2 - \lambda) = 0$, t.j.

$$-\lambda(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Nalezení vlastních vektorů příslušných k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ pak vede k řešení soustavy rovnic

$$(\mathbf{A} - 0.\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-0 & 3 & 1 \\ 1 & -2-0 & 1 \\ 1 & -3 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Použitím Gaussovy eliminační metody zjistíme, že ekvivalentní soustava má tvar

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_1 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0^{\cdot} \end{array}$$

Položíme $x_3 = t$ a dostaneme $x_1 = x_2 = x_3 = t$. Řešení soustavy je tedy tvaru $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, $t \in \mathbf{C}$.

Podobně pro vlastní číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ budeme řešit soustavu

$$(\mathbf{A} - 1.\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 1 & -2-1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

atd.

Příklady:

1. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, k) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

l) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Určete vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Řešení:

1. a) $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x} = (t, -2t)^T$, b) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (4t, 3t)^T$; $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$,
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$, d) $\lambda_1 = 3 + 4i$, $\mathbf{x} = (2it, t)^T$; $\lambda_2 = 3 - 4i$, $\mathbf{x} = (-2it, t)^T$,
e) $\lambda_1 = 2 + i$, $\mathbf{x} = (t, (1 + i)t)^T$; $\lambda_2 = 2 - i$, $\mathbf{x} = (t, (1 - i)t)^T$, f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

$\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$, g) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t, 0)^T$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x} = (r, s, -s)^T$, h) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$; $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$; $\lambda_3 = -2$, $\mathbf{x} = (-t, -t, 5t)^T$, i) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (7t, 3t, t)^T$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (3t, 2t, t)^T$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, j) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\mathbf{x} = (t, 0, t)^T$, k) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (r, s, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$; $\lambda_4 = 4$, $\mathbf{x} = (0, 0, 0, t)^T$; l) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (t, 2t, 0, 0)^T$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (0, t, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$,
vždy pro $r, s, t \in \mathbf{C}$.

Kombinatorika

Příklad

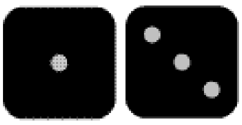
U stánku nabízejí čtyři druhy zmrzliny a tři polevy. Kolik různých zmrzlin s polevou lze vytvořit, jestliže nechceme míchat více druhů ani více polev?

Kombinatorické pravidlo součinu:

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Příklad

Kolik různých uspořádaných dvojic čísel můžeme dostat, když hodíme dvakrát kostkou s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách?



Kombinatorické pravidlo součtu:

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Příklad

Do třídy chodí 28 žáků. Devět z nich jezdí do školy autobusem a tři vozí do školy rodiče autem. Kolik žáků z této třídy chodí do školy pěšky, jestliže nikdo nepoužívá na cestě do školy jiný dopravní prostředek?

Příklad

V jedné třídě, ve které každý žák ovládá aspoň jeden ze dvou jazyků (angličtinu nebo němčinu), hovoří 25 žáků anglicky, 16 žáků německy a 7 žáků hovoří oběma jazyky. Kolik žáků chodí do této třídy?

Příklad

Při matematické soutěži řešili žáci tři úlohy; označme je A, B, C. Ze stočtyřiceti soutěžících vyřešilo úlohu A osmdesát, úlohu B sedmdesát a úlohu C padesát soutěžících. Přitom úlohu A a zároveň B vyřešilo čtyřicet soutěžících, úlohu B a zároveň C třicet soutěžících a stejně tak i úlohu A a zároveň C vyřešilo třicet soutěžících. Všechny tři úlohy vyřešilo dvacet soutěžících. Kolik soutěžících nevyřešilo ani jednu úlohu?

Zápis ***n!*** čteme n-faktoriál nebo také faktoriál čísla n, označuje součin všech přirozených čísel menších nebo rovných n.

Výpočet faktoriálu: $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$,

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)!$, $\qquad 0! = 1$.

Variací bez opakování k-té třídy z n prvků nazýváme každou uspořádanou k-prvkovou podmnožinu n prvkové základní množiny M.

Počet variací bez opakování : $\qquad V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $\qquad 0 \le k \le n$, $(k, n \in \mathbf{N})$

k-**členná variace** z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Pro ilustraci uveďme všechny tříčlenné variace ze čtyř prvků a, b, c, d:

$$
\begin{aligned}
&(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a),\\
&(a,b,d),\ (a,d,b),\ (b,a,d),\ (b,d,a),\ (d,a,b),\ (d,b,a),\\
&(a,c,d),\ (a,d,c),\ (c,a,d),\ (c,d,a),\ (d,a,c),\ (d,c,a),\\
&(b,c,d),\ (b,d,c),\ (c,b,d),\ (c,d,b),\ (d,b,c),\ (d,c,b).
\end{aligned}
$$

uspořádaná k-tice:	1. člen	2. člen	…	$(k-1)$-ní člen	k-tý člen
možnosti výběru z n prvků:	$\uparrow$ n	$\uparrow$ $n-1$		$\uparrow$ $n-(k-2)$	$\uparrow$ $n-(k-1)$

Podle kombinatorického pravidla součinu je počet všech těchto uspořádaných k-tic roven součinu

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Počet $V(k,n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Příklad 6.2.1. Zapište variace bez opakování 2.třídy a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

Řešení: $V_2(3)$: $(1,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1), (3,2)$,

$$V_2(3) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6.$$

Příklad 6.2.2. Jsou dány cifry $1, 2, 3, 4, 5$. Kolik trojciferných čísel lze z nich sestavit, jestliže se cifry neopakují ?

5. Pomocí podílového kritéria rozhodněte o konvergenci řad:[6]

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{5 \cdot 3^n}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n (n!)}$, (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$, (h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{\ln n}$.

6. Pomocí odmocninového kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+2)}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \left(\frac{n\sqrt{3}}{2n+1}\right)$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)^n$.

7. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathrm{e}^{-n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2 - n - 1}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2 + 4}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 4}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{n}}{\mathrm{e}^{2n} + 1}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$, (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} n$, (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.