***7. hodina*** ***(MA2-E)***

## ***Kombinatorika***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| uspořádaná $k$-tice: | 1. člen | 2. člen | … | $(k-1)$-ní člen | $k$-tý člen |
| | $\uparrow$ | $\uparrow$ | | $\uparrow$ | $\uparrow$ |
| možnosti výběru z $n$ prvků: | $n$ | $n-1$ | | $n-(k-2)$ | $n-(k-1)$ |

Podle kombinatorického pravidla součinu je počet všech těchto uspořádaných $k$-tic roven součinu

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

Počet $V(k,n)$ všech $k$-členných variací z $n$ prvků je

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

**Příklad 6.2.1.** Zapište variace bez opakování 2.třídy a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

**Řešení:** $V_2(3)$: $(1,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1), (3,2)$,

$$V_2(3) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\cdot2\cdot1}{1} = 6.$$

**Příklad 6.2.2.** Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Kolik trojciferných čísel lze z nich sestavit, jestliže se cifry neopakují ?

**Příklad 1**

K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

a) Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.

b) Kolik z nich má modrý pruh?

c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed?

d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh?

**Příklad 1.1.2.** Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

**Permutace z $n$ prvků** je každá $n$-členná variace z těchto prvků.

**Permutace** z $n$ prvků je uspořádaná $n$-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

**Počet permutací $n$ prvků bez opakování**

$P(n) = n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$

Pro každé přirozené číslo $n$ definujeme:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$0! = 1$$

**Příklad 6.3.1.** Zapište permutace bez opakování a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$.

**Příklad 6.3.2.** Kolik přesmyček lze vytvořit použitím všech písmen slova fyzika?

**Kombinací bez opakování** k-té třídy z $n$ prvků nazýváme každou $k$ prvkovou podmnožinu základní množiny $M$, v níž nezáleží na pořadí prvků.

**Počet kombinací bez opakování:** $C_k(n) = \binom{n}{k}$, $\quad 0 \le k \le n$, $(k, n \in \mathbf{N})$.

**Příklad 6.4.1.** Zapište kombinace 2. třídy bez opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

1. Vypočtěte kombinační čísla

a) $\binom{24}{0}$, b) $\binom{12}{12}$, c) $\binom{15}{1}$, d) $\binom{9}{2}+\binom{9}{3}$.

3. Ve třídě je 25 žáků, z nichž 4 mají být vyzkoušeni. Kolik různých čtveřic může být vyzkoušeno?

4. Jistý muž má 5 kabátů, 4 vesty a 6 kalhot. Kolika různými způsoby se může obléct?

5. V lavici mohou sedět čtyři žáci. Kolikerým způsobem je možno lavici obsadit, máme-li pět žáků a záleží na pořadí míst?

**Příklad 1**

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici $8 \times 8$ vybrat

a) trojici políček;
b) trojici políček neležících v témže sloupci;
c) trojici políček neležících v témže sloupci ani v téže řadě;
d) trojici políček, která nejsou všechna téže barvy.

**Příklad 2**

Určete, kolika způsoby je možno ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou a) právě dvě ženy; b) aspoň dvě ženy.

**Příklad 3**

V rovině je dáno $n$ bodů, z nichž $p$ leží na jedné přímce; kromě nich žádné tři body na téže přímce neleží. Určete, kolik je těmito body určeno a) přímek; b) trojúhelníků; c) kružnic.

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ bývá označováno termínem **binomický koeficient**, je-li užíváno ve vztahu pro $n$-tou mocninu dvojčlenu (binomu).

Jsou-li $a,b$ libovolná čísla a $n$ číslo přirozené, platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Rozveďte pomocí binomické věty a zjednodušte $(1+\sqrt{2})^4$.

Který člen rozvoje výrazu $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$, $x \neq 0$, neobsahuje $x$?

**9.** Užitím binomické věty vypočtěte

a) $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)^6$,

b) $(1{,}01)^7$ s přesností na tři desetinná místa.

**10.** Vypočtěte: a) $\binom{7}{2}$, b) $\binom{15}{12}$, c) $\binom{x}{3}$.

**11.** Kterým kombinačním číslem je možno vyjádřit součty:

a) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$, b) $\binom{14}{3} + \binom{14}{10}$, c) $\binom{n}{4} + \binom{n}{5}$.

***Řešení některých úloh:***

**1.** a) 1; b) 1; c)15; d) 120. **2.** a) $x \geq 3; x = 5$; b) $x \geq 1; x = 2$. **3.** 12650. **4.** 120. **5.** 120. **6.** 216. **7.** 12. **8.** 720. **9.** a) $\frac{a^6}{64} - \frac{a^5 b}{16} + \frac{5a^4b^2}{48} - \frac{5a^3b^3}{54} + \frac{5a^2b^4}{108} - \frac{ab^5}{81} + \frac{b^6}{729}$; b) 1,072. **10.** a) 21; b) 455; c) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}$. **11.** a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{15}{4}$; c) $\binom{n+1}{5}$. **12.** a) $(n+1)n$; b) $\frac{1}{n-1}$; c) 1. **13.** $n = 7$. **14.** $n = 2$. **15.** $n = 8$. **16.** a) 120; b) 24; c) 48; d) 72.

## ***Definiční obor funkce více proměnných***

**Příklad 4.1.1.** Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

**Příklad 4.1.2.** Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \sqrt{y \sin x}.$$

**Příklad 4.1.3.** Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \arcsin(x+y).$$

**1.** Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{x+y-5}{x-y+8}$.

**2.** Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{16-x^2-4y^2}$.

**3.** Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{y^2-1}$.

**4.** Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \ln x + \ln y - ln(1-x-y)$.

**5.** Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \ln(y(x+2))$.

**6.** Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{1}{\arcsin x \cdot \arccos y}$.

**7.** Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = (1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \arccos 2x$.

**8.** Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \arccos(x-y^2+1)$.

**9.** Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{\cos(2x-y)}$.

**10.** Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \operatorname{tg}(\arcsin(x+y))$.