

8. hodina (MA2-E)

Parciální derivace

Příklad 5.1.1. Určete všechny parciální derivace funkce

$$f(x, y) = 3x^4y^2 - 5 \arctan x^2.$$

Řešení: Jedná se o funkci dvou proměnných x, y . Hledáme tedy parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$.

1. Nejdříve budeme derivovat zadanou funkci podle x , proměnnou y budeme považovat za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3y^2 - \frac{5}{1+x^4}2x = 12x^3y^2 - \frac{10x}{1+x^4}.$$

2. Derivujeme podle y , nyní x budeme považovat za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y.$$

Příklad 5.1.2. Určete všechny parciální derivace funkce

$$g(x, y, z) = 3x^2 + \frac{x-y}{x+y} - e^{x-2y+3z}.$$

Řešení: Postupně zadanou funkci derivujeme podle jednotlivých proměnných.

1. Derivujeme podle x , proměnné y, z považujeme za konstanty:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 6x + \frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z} \cdot 1 \\ &= 6x + \frac{2y}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z}. \end{aligned}$$

2. Derivujeme podle y , proměnné x, z považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z} \cdot (-2) = \frac{-2x}{(x+y)^2} + 2e^{x-2y+3z}.$$

3. Derivujeme podle z , proměnné x, y považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -e^{x-2y+3z} \cdot 3 = -3e^{x-2y+3z}.$$

Příklad 5.1.3. Určete hodnoty všech parciálních derivací funkce

$$f = xe^{-x^2y}$$

v bodě $A = [1, -1]$.

Řešení: Vypočítáme jednotlivé parciální derivace zadané funkce a určíme jejich funkční hodnotu v bodě A přímým dosazením:

1. Derivujeme podle x , proměnnou y považujeme za konstantu, a poté do derivace funkce f podle x , což je opět funkce proměnných x, y , dosadíme bod A :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = e^{-x^2y} + xe^{-x^2y}(-2xy) \Big|_{A=[1,-1]} = e^{-x^2y}(1 - 2x^2y) \Big|_{A=[1,-1]} = 3e.$$

2. Derivujeme podle y , proměnnou x považujeme za konstantu, a poté do derivace funkce f podle y dosadíme bod A :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = xe^{-x^2y}(-x^2) \Big|_{A=[1,-1]} = -x^3e^{-x^2y} \Big|_{A=[1,-1]} = -e.$$

Definice 5.1.2.

Parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ jsou definovány vztahy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nazýváme **smíšené parciální derivace**.

Věta 5.1.2.

Jsou-li smíšené parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak jsou si v tomto bodě rovny, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A).$$

Příklad 5.1.4. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$$z = x^2y + \frac{y^3}{x^4}.$$

Řešení: Nejdříve vypočítáme parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4}.$$

Derivujeme ještě jednou podle x i podle y funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2y + \frac{20y^3}{x^6}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{6y}{x^4}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2x - \frac{12y^2}{x^5}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2x - \frac{12y^2}{x^5}.\end{aligned}$$

Příklad 5.1.5. Vypočítejte $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, je-li

$$z = y^2 \sin x.$$

Řešení: Zadanou funkci z budeme postupně derivovat dvakrát podle x a poté podle y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \sin x, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -2y \sin x.$$

1. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.
2. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y) = \tan(x^3 y)$ v bodě $A = [0, \pi]$.
3. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y, z) = e^{xyz} + e^{x+2y+3z} + x^y + y^z$.
4. Určete všechny parciální derivace funkce

$f(x, y, z) = \sin x \cos y + \sin(x + y) \cos(y + z) + \sin z$ v bodě $A = [0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

5. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$f(x, y) = y \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{(2x + 3y)^3}$.

6. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ v bodě $A = [1, -1]$.

Řešení některých úloh:

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2), \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2).$
2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2 y}{\cos^2(x^3 y)}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{\cos^2(x^3 y)}, \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0.$
3. $\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xyz} + e^{x+2y+3z} + yx^{y-1}, \frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xyz} + 2e^{x+2y+3z} + x^y \ln x + zy^{z-1}, \frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xyz} + 3e^{x+2y+3z} + y^z \ln y.$
4. $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y + \cos(x+y) \cos(y+z), \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \sin y + \cos(x+y) \cos(y+z) - \sin(x+y) \sin(y+z), \frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(x+y) \sin(y+z) + \cos z, \frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3}), \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\partial f}{\partial z}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$
5. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} + 3\sqrt{2x+3y}, \frac{\partial f}{\partial y} = \arcsin \sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt{2x+3y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y(1-2x)}{4[x(1-x)]^{\frac{3}{2}}} + 3(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{27}{4}(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} + \frac{9}{2}(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}.$
6. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -\frac{1}{2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = -\frac{1}{2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \frac{1}{2}.$

Další úlohy:

Příklad 5. Vypočítejte parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných v obecném bodě a vyčíslíte je v daném bodě A , je-li:

- | | |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $f(x, y) = \frac{\pi}{3}x^2y, A = [4, 6],$ | $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\pi}{3}xy, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pi}{3}x^2 \right]$ |
| b) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, A = [1, 1],$ | $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \right]$ |
| c) $f(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{x^4}, A = [1, 1],$ | $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4} \right]$ |
| d) $f(x, y) = x \sin^2 y, A = [1, \pi],$ | $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \sin^2 y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x \sin y \cos y \right]$ |
| e) $f(x, y) = e^x \sin(2y), A = [0, 0],$ | $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin(2y), \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^x \cos(2y) \right]$ |
| f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}, A = [1, 0],$ | $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}} \right]$ |
| g) $f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{x-y}, A = [1, -1],$ | $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \right]$ |
| h) $f(x, y) = x^y, A = [2, -1],$ | $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x \right]$ |