9. hodina

Tři nejzákladnější metody integrace: 1) přímá, 2) per partes 3) substituční

2) per partes

Věta 1.3.1. (Integrování per partes, čili po částech)

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu (a,b) spojitou derivaci, pak v (a,b) platí

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx\ .$$

Poznámka

Integrační metoda se nazývá per partes (po částech), neboť se integrál z funkce $f(x)=u'(x)\cdot v(x)$ vypočte jen zčásti. Zbývá totiž vypočíst další integrál z funkce $g(x)=u(x)\cdot v'(x)$. ***Integrování metodou per partes vyžaduje určitou „prozíravost“, abychom*** *volili funkce $u'(x)$ a $v(x)$ tak, aby byl integrál $\int g(x)dx = \int u(x)\cdot v'(x)dx$, pokud možno, jednodušší.*

2. Vypočtěte integrály:

2.) $\int \frac{x}{3}e^x\,dx =$ 3.) $\int \ln x\,dx =$ 4.) $\int x.\sin x\,dx$

3. Vypočtěte integrály:

5.) $\int x^3 \ln x\,dx =$ 6.) $\int x^2 e^x dx =$ 7.) $\int x^2.\ln x\,dx =$

4. Vypočtěte integrály:

$$8.)\ \int x.\cos x\,dx,\quad 9.)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx,\quad 10.)\ \int x.\ln x\,dx$$

3) substituce

Substituce typu $\varphi(x) = u$

Máme vypočítat integrál typu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.1, položíme (provedeme substituci)

$\varphi(x) = u$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$\varphi'(x)dx = du$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(u)\,du$.

Příklad 1.4.1. Vypočtěte integrál $\int 2x\sin(x^2+1)\,dx$.

Příklad 1.4.2. Vypočtěte integrál $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

Příklad 1.4.4. Vypočtěte integrál $\int 3x\sqrt{5+x^2}\,dx$.

1. Vypočtěte integrály:

1.) $\int (5x-1)^3 dx =$ 2.) $\int \frac{5x}{(x^2+4)^3} dx =$ 3.) $\int \sqrt[3]{4x-7}\, dx$

2. Vypočtěte integrály:

4.) $\int e^{5x} dx =$ 5.) $\int e^{1+\sin x} \cos x\, dx =$ 6.) $\int x.e^{x^2} dx =$

4. Vypočtěte integrály:

10.) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx =$ 11.) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx =$ 12.) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx =$

5. Vypočtěte integrály:

13.) $\int \cos\frac{x}{4} dx =$ 14.) $\int \sin 2x\, dx =$ 15.) $\int \cot g(2x+1) dx =$

6. Vypočtěte integrály:

16.) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx =$ 17.) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[4]{(\cos x + \sin x)}} dx =$ 18.) $\int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x} dx =$

Určité integrály:

Věta 2.2.1. (Newtonova – Leibnizova formule)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $<a,b>$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $<a,b>$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Příklad 2.2.1. Vypočtěte integrál $\int_1^2 x^3 dx$.

2. Vypočtěte integrály:

2.) $\int_2^5 (2x+3)dx =$ 3.) $\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1)dx =$

4.) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx =$ 5.) $\int_1^3 \frac{1}{1+x}dx$ 6.) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2 x}dx$

3. Vypočtěte integrály:

7.) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx =$ 8.) $\int_1^4 \sqrt{x}dx =$ 9.) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x}dx =$