

9. hodina (MA2-E)

Hledání extrémů funkce více proměnných

Definice 6.1.2.

Řekneme, že bod $A \in \mathbb{R}^n$ je **stacionárním bodem** funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Věta 6.1.1.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě A lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce f . Pak bod A je stacionárním bodem funkce f .

Poznámka: stacionární bod je pouze nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému, nikoli postačující. Tzn. funkce nutně nemusí mít ve stacionárním bodě extrém.

Označme

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}$$

hlavní determinanty matice parciálních derivací druhého řádu. Pak pro stacionární bod A funkce f platí:

1. Je-li $D_1 > 0 \wedge D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální minimum**,
2. Je-li $D_1 < 0 \wedge D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální maximum**,
3. Je-li $D_2 < 0$, pak pro funkci f v bodě A **extrém neexistuje**.

Věta 6.1.3.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$ je na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ dvakrát spojitě diferencovatelná. Nechť bod A je její stacionární bod. Jestliže

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2 > 0,$$

pak má funkce f v bodě A ostrý lokální extrém. Je-li navíc $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$, jedná se o **ostré lokální minimum**, je-li $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$, jedná se o **ostré lokální maximum**.

Poznámka

V případě, že $D_2 = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout. Tento problém lze v některých případech řešit tak, že vyšetříme lokální chování funkce f na okolí bodu A .

Příklad 6.1.1. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2.$$

Řešení: Funkce je definovaná na celém \mathbb{R}^2 , $D_f = \mathbb{R}^2$. Postup řešení lze rozdělit do následujících kroků:

1. Určíme parciální derivace funkce f prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 6y.$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, tj. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dostaneme tak soustavu rovnic pro stacionární body funkce f .

$$3x^2 - 3y = 0,$$

$$-3x + 6y = 0.$$

3. Soustavu rovnic pro stacionární body vyřešíme. Ze druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do rovnice první.

$$x = 2y \Rightarrow 3(2y)^2 - 3y = 0 \Rightarrow 12y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(4y - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A_1 = [0, 0]$$

$$y = \frac{1}{4} \Rightarrow -3x + \frac{6}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right].$$

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu funkce f ,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q postupně dosadíme jednotlivé stacionární body (tzn. x -ovou souřadnici stacionárního bodu za x , y -ovou souřadnici stacionárního bodu za y).

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Vypočítáme determinanty D_1, D_2 pro matice $Q(A_1), Q(A_2)$. Hodnoty determinantů rozhodnou o charakteru extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0, 0]$	0	$-9 < 0$	extrém neexistuje
$A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$	$3 > 0$	$9 > 0$	ostré lokální minimum $z = -\frac{1}{16}$

Příklad 6.1.3. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3.$$

Řešení: Definičním oborem funkce f je $D_f = \mathbb{R}^2$.

1. Určíme parciální derivace funkce f .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2.$$

2. Parciální derivace položíme rovny 0, dostáváme soustavu rovnic pro stacionární body,

$$3x^2 = 0,$$

$$3y^2 = 0.$$

3. Řešením soustavy je jediný stacionární bod $A = [0, 0]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q dosadíme stacionární bod,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Determinant $D_1 = 0$, $D_2 = 0$. Nemůžeme o existenci extrému rozhodnout. Ovšem jaká bude funkční hodnota v bodě A ? Dosadíme souřadnice bodu A do funkčního předpisu funkce f , tedy $f(A) = 0$. Jak se funkce chová na okolí bodu $A = [0, 0]$. Když dosadíme za x a za y záporná čísla, hodnota z bude záporná, tj. $z < f(A)$. Pokud za x a y do funkčního předpisu dosadíme kladná čísla, hodnota z bude kladná, tj. $z > f(A)$. Na libovolném okolí bodu $[0, 0]$ existují body, jejichž funkční hodnota je větší než $f(A)$, ale zároveň existují body, jejichž funkční hodnota je menší než $f(A)$. V bodě $A = [0, 0]$ extrém neexistuje.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 6x + 3y^2 - 12y + 11$.
2. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 3xy - x + 2y$.
3. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - xy + 3x + y + 3$.
4. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 12x - 2y^2 - 4y$.
5. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3}y^3 - 9y$.
6. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^5 - 5x + y^3 - 3y$.
7. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy - 2x - 3y + 5y^2 + 3$.
8. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4x + \frac{9}{2}y^2 - 15y$.
9. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + 4x)y + y^2$.
10. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 20y$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. Stacionární bod: $A = [-3, 2]$ - ostré lokální minimum $f(A) = -10$.
2. Stacionární bod: $A = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ - extrém neexistuje.
3. Stacionární bod: $A = [1, 5]$ - extrém neexistuje.
4. Stacionární body: $A_1 = [2, -1]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [-2, -1]$ - ostré lokální maximum $f(A_2) = 18$.
5. Stacionární body: $A_1 = [5, 3]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [5, -3]$ - ostré lokální maximum $f(A_2) = \frac{61}{2}$.
6. Stacionární body: $A_1 = [-1, 1]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [1, 1]$ - ostré lokální minimum $f(A_2) = -6$, $A_3 = [1, -1]$ - extrém neexistuje, $A_4 = [-1, -1]$ - ostré lokální maximum $f(A_4) = 6$.