MATEMATIKA 3

Řešené příklady

Dana Černá

Katedra matematiky

Technická univerzita v Liberci

https://kma.fp.tul.cz

2024

Laplaceova transformace

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y = e^t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$$

Řešení: Nejprve aplikujeme Laplaceovu transformaci na zadanou diferenciální rovnici. Laplaceův obraz řešení $y(t)$ označíme $Y(p)$. Pro funkci $y''(t)$ platí, že její Laplaceův obraz je dán vztahem $p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$. Funkce e^t na pravé straně dané rovnice má dle tabulky Laplaceův obraz $1/(p-1)$. Transformovaná rovnice má tedy tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 4Y(p) = \frac{1}{p-1}. \tag{1}$$

Nyní dosadíme zadané počáteční podmínky $y(0) = 2$ a $y'(0) = 0$ a dostaneme

$$p^2Y(p) - 2p + 4Y(p) = \frac{1}{p-1}. \tag{2}$$

Z této rovnice vyjádříme $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+4)} + \frac{2p}{p^2+4}. \tag{3}$$

Nyní je potřeba najít funkci $y(t)$, která odpovídá Laplaceovu obrazu $Y(p)$. Abychom tento vzor mohli určit pomocí tabulky Laplaceovy transformace, rozložíme první člen na pravé straně rovnice (3) na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+4} = \frac{Ap^2 + 4A + Bp^2 - Bp + Cp - C}{(p-1)(p^2+4)}. \tag{4}$$

Porovnáním čitatelů u zlomků na levé a pravé straně této rovnice dostaneme soustavu rovnic pro koeficienty A, B a C:

$$A + B = 0, \quad C - B = 0, \quad 4A - C = 1. \tag{5}$$

Z prvních dvou rovnic plyne, že $A = -B$ a $C = B$. Dosazením těchto vztahů do poslední rovnice dostaneme $-4B - B = -5B = 1$ a proto

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = -\frac{1}{5}. \tag{6}$$

Nyní vyjádříme $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{1}{5}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{5}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+4} + \frac{2p}{p^2+4} = \frac{1}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{9}{5}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+4}. \tag{7}$$

Z tohoto vyjádření již můžeme snadno určit funkci $y(t)$, která je vzorem $Y(p)$ a je řešením zadané rovnice:

$$y(t) = \frac{e^t}{5} + \frac{9}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t, \quad t \in [0, \infty). \tag{8}$$

Příklad 2. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = e^t,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

Řešení: Nejprve provedeme Laplaceovu transformaci zadané rovnice. K tomu použijeme vztahy

$$\mathcal{L}\{y\}(p) = Y(p), \tag{9}$$
$$\mathcal{L}\{y'\}(p) = pY(p) - y(0), \tag{10}$$
$$\mathcal{L}\{y''\}(p) = p^2Y(p) - py(0) - y'(0). \tag{11}$$

Funkce e^t na pravé straně zadané rovnice má Laplaceův obraz $1/(p-1)$. Transformovaná rovnice má tedy tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) - 2(pY(p) - y(0)) + Y(p) = \frac{1}{p-1}. \tag{12}$$

Dosadíme počáteční podmínku $y(0) = 0$. Hodnotu $y'(0)$ zatím neznáme, jedná se o konstantu, kterou pro jednoduchost zápisu označíme k. Dostaneme

$$p^2Y(p) - k - 2pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p-1}. \tag{13}$$

Z této rovnice vyjádříme Laplaceův obraz řešení:

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{k}{(p-1)^2}. \tag{14}$$

Dle tabulky je Laplaceův obraz funkce t^2e^t roven funkci $2/(p-1)^3$ a Laplaceův obraz funkce te^t je funkce $1/(p-1)^2$. Vztah pro $Y(p)$ ještě můžeme upravit do tvaru

$$Y(p) = \frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^3} + \frac{k}{(p-1)^2}, \tag{15}$$

ze kterého určíme vzor funkce $Y(p)$:

$$y(t) = \frac{t^2e^t}{2} + k\,te^t. \tag{16}$$

Pro určení konstanty k použijeme zadanou okrajovou podmínku $y(1) = 0$ a dostaneme

$$0 = y(1) = \frac{e}{2} + ke = \left(\frac{1}{2} + k\right)e, \tag{17}$$

ze které plyne, že $k = -1/2$. Řešením zadané diferenciální rovnice je tedy funkce

$$y(t) = \frac{t^2e^t}{2} - \frac{te^t}{2} = \frac{(t^2 - t)\,e^t}{2}, \quad t \in [0, \infty). \tag{18}$$

Příklad 3. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' = f,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0,2)$ a $f(t) = t$ pro $t \geq 2$.

Řešení: Obecnou funkci tvaru

$$f(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [a,\infty) \\ 0, & t \in (-\infty, a) \end{cases}$$

lze zapsat pomocí skokové funkce jako $f(t) = u(t) H(t-a)$. Funkci na pravé straně dané rovnice tedy vyjádříme pomocí skokové funkce ve tvaru $f(t) = tH(t-2)$. Pro výpočet Laplaceovy transformace použijeme vztah

$$\mathcal{L}\{g(t-a) H(t-a)\}(p) = G(p) e^{-ap}, \tag{19}$$

ve kterém je $a > 0$ a $G(p)$ je Laplaceův obraz funkce $g(t)$. Je tedy potřeba funkci f vyjádřit jako součet členů ve tvaru $g(t-a) H(t-a)$. Použijeme úpravu

$$f(t) = tH(t-2) = (t-2+2) H(t-2) = (t-2) H(t-2) + 2H(t-2). \tag{20}$$

Nejprve provedeme Laplaceovu transformaci prvního členu na pravé straně rovnice (20). Položme

$$g(t-a) H(t-a) = (t-2) H(t-2). \tag{21}$$

Z toho plyne, že $a = 2$, $g(t-2) = t-2$, $g(t) = t$ a obraz $g(t)$ je $G(p) = 1/p^2$. Laplaceův obraz funkce $(t-2) H(t-2)$ je tedy funkce $G(p) e^{-ap} = e^{-2p}/p^2$.

Nyní uvažujme druhý člen na pravé straně rovnice (20) a položme

$$g(t-a) H(t-a) = 2H(t-2). \tag{22}$$

Zde máme $a = 2$, $g(t-2) = 2$, $g(t) = 2$ a $G(p) = 2/p$, z čehož vyplývá, že Laplaceův obraz funkce $2H(t-2)$ je $G(p) e^{-ap} = 2e^{-2p}/p$. K transformaci levé strany dané rovnice použijeme vztah (11). Transformovaná rovnice má tedy tvar

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{2}{p} e^{-2p}. \tag{23}$$

Po dosazení zadaných počátečních podmínek dostaneme

$$p^2 Y(p) - 2p - 1 = \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{2}{p} e^{-2p}, \tag{24}$$

což upravíme do tvaru

$$Y(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} e^{-2p} + \frac{2}{p^3} e^{-2p}. \tag{25}$$

Zbývá určit vzor funkce $Y(p)$, k čemuž opět využijeme vztah (19). Nejprve uvažujme

$$G(p)\, e^{-ap} = \frac{1}{p^4} e^{-2p}. \tag{26}$$

V tomto případě je $a = 2$ a funkce $G(p) = 1/p^4$ má vzor $g(t) = t^3/6$. Z toho vyplývá, že funkce e^{-2p}/p^4 má vzor

$$g(t-a)\, H(t-a) = \frac{(t-2)^3}{6} H(t-2). \tag{27}$$

Analogicky budeme uvažovat

$$G(p)\, e^{-ap} = \frac{2}{p^3} e^{-2p}. \tag{28}$$

Zde je $a = 2$ a funkce $G(p) = 2/p^3$ má vzor $g(t) = t^2$. Z toho vyplývá, že funkce $2e^{-2p}/p^3$ má vzor

$$g(t-a)\, H(t-a) = (t-2)^2 H(t-2). \tag{29}$$

Funkce $y(t)$ odpovídající Laplaceovu obrazu $Y(p)$ je tedy dána výrazem:

$$y(t) = 2 + t + \frac{(t-2)^3}{6} H(t-2) + (t-2)^2 H(t-2), \quad t \in [0, \infty), \tag{30}$$

a představuje řešení zadané diferenciální rovnice.

Grafické znázornění množin

Příklad 4. Graficky znázorněte množinu

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0\right\}.$$

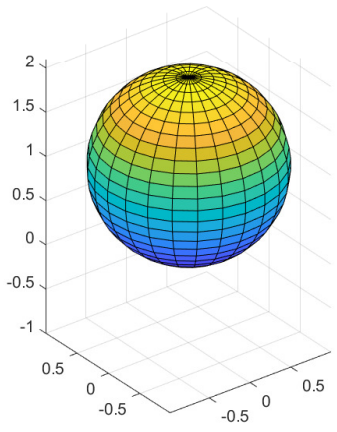
Řešení: Zadanou rovnici upravíme tak, že členy s proměnnou z doplníme na čtverec. Přičtením 1 k zadané rovnici získáme rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 1, \tag{31}$$

a potom dále po úpravě dostaneme

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1. \tag{32}$$

To je rovnice, která určuje kulovou plochu se středem $[0, 0, 1]$ a poloměrem 1, která je znázorněna na obrázku 1.

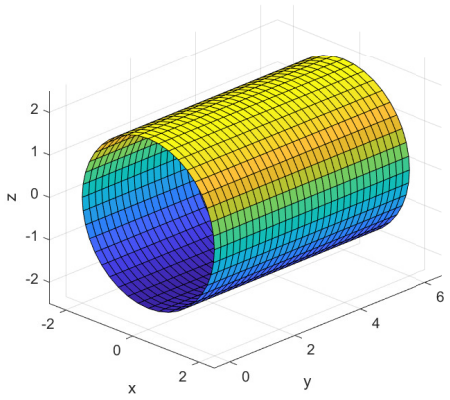


Obrázek 1: Kulová plocha se středem $[0, 0, 1]$ a poloměrem 1.

Příklad 5. Graficky znázorněte množinu

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4, y \in [0, 6]\right\}.$$

Řešení: Rovnice $x^2+z^2 = 4$ určuje rotační válcovou plochu s osou rotace y a poloměrem 2. Druhá rovnice tuto plochu omezuje na část, pro kterou $y \in [0, 6]$. Výsledná válcová plocha je znázorněna na obrázku 2.

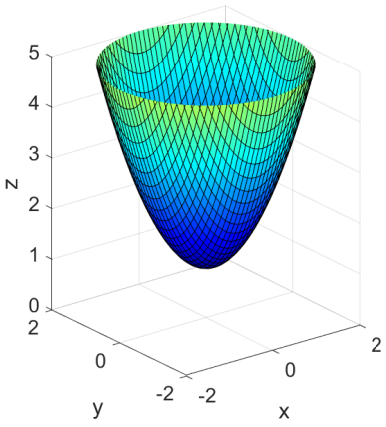


Obrázek 2: Rotační válcová plocha s poloměrem 2 a výškou 6, jejíž osa rotace je osa y.

Příklad 6. Graficky znázorněte množinu

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 + 1, z \leq 5\right\}.$$

Řešení: Víme, že rovnice $z = x^2 + y^2$ určuje rotační paraboloid, jehož osa rotace je osa z a který má vrchol v bodě $[0, 0, 0]$. Rovnice $z = x^2 + y^2 + 1$ určuje rotační paraboloid, ve kterém jsou hodnoty na ose z o jedna větší než v předchozím případě. Pokud tedy graf rotační paraboloidu příslušného rovnici $z = x^2 + y^2$ posuneme o 1 nahoru, dostaneme graf paraboloidu příslušného rovnici $z = x^2 + y^2 + 1$. Zadaná rovnice tedy určuje rotační paraboloid s osou rotace z a vrcholem $[0, 0, 1]$. Druhá rovnice tuto plochu omezuje na část, pro kterou $z \leq 5$. Výsledná plocha je znázorněna na obrázku 3.

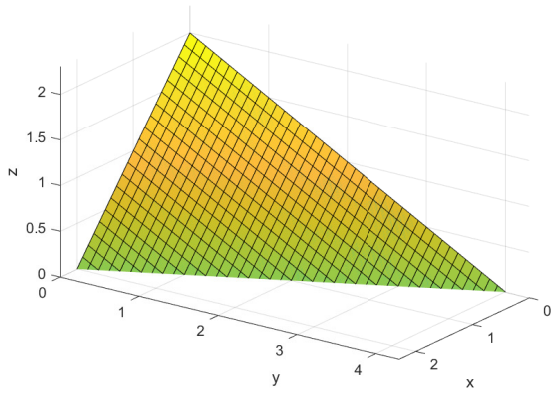


Obrázek 3: Rotační paraboloid s osou rotace z a vrcholem $[0, 0, 1]$ pro hodnoty $z \leq 5$.

Příklad 7. Graficky znázorněte množinu

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 2z = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}.$$

Řešení: Rovnice $2x + y + 2z = 4$ je lineární rovnice se třemi proměnnými, takže množina bodů daná touto rovnicí je rovina. Určíme její průsečíky s osami. Pokud $x = y = 0$, potom z vyhovující této rovnici je rovno 2, což implikuje, že průsečík dané roviny s osou z je bod $[0, 0, 2]$. Pokud $x = z = 0$, potom y vyhovující této rovnici je rovno 4, z čehož vyplývá, že průsečík dané roviny s osou y je bod $[0, 4, 0]$. Analogickou úvahou dospějeme k závěru, že průsečík dané roviny s osou x je bod $[2, 0, 0]$. Ze zadaných podmínek $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ plyne, že bereme pouze tu část roviny, která leží v prvním oktantu. Výsledná plocha je znázorněna na obrázku 4.



Obrázek 4: Část roviny, jejíž průsečíky se souřadnicovými osami jsou body $[2, 0, 0]$, $[0, 4, 0]$ a $[0, 0, 2]$ a která leží v prvním oktantu.

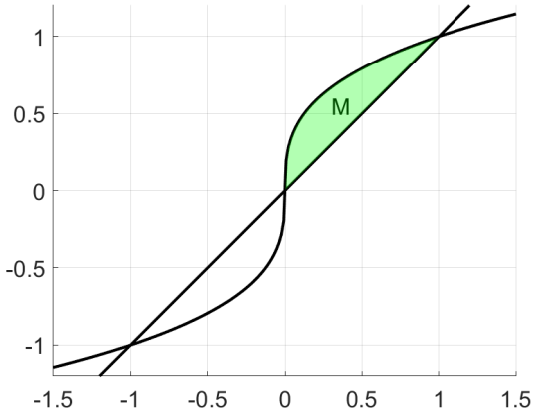
Vícerozměrné integrály

Příklad 8. Vypočtěte

$$\iint\limits_M x + y \, dx \, dy, \tag{33}$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y^3 \leq x \leq y\}$.

Řešení: První nerovnice $y^3 \leq x$ určuje část roviny ležící pod křivkou danou rovnicí $y^3 = x$, tj. pod grafem funkce $y = \sqrt[3]{x}$. Druhá nerovnice určuje polorovinu nad přímkou $y = x$. Množina M je průnikem těchto dvou množin, jak je znázorněno na obrázku 5. Řešením soustavy rovnic $x = y^3$ a $x = y$ zjistíme, že průsečíky výše uvedené křivky a přímky, které patří do M, jsou body $[0, 0]$ a $[1, 1]$.



Obrázek 5: Množina M z příkladu 8.

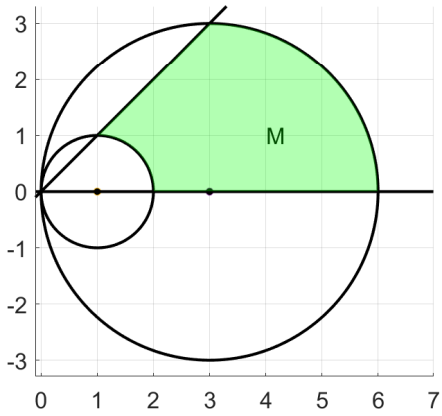
V zadaném integrálu zvolíme proměnnou y jako nezávislou proměnnou. Tato proměnná nabývá hodnot od 0 do 1. Meze pro proměnnou x potom závisí na y a podle zadané podmínky jsou tyto meze y^3 a y. Tyto meze dosadíme do integrálu a dostaneme:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_M x + y \, dx \, dy &= \int\limits_0^1 \int\limits_{y^3}^{y} x + y \, dx \, dy = \int\limits_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{y^3}^{y} dy \\
&= \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2} + y^2 - \frac{y^6}{2} - y^4 \, dy = \int\limits_0^1 \frac{3y^2}{2} - \frac{y^6}{2} - y^4 \, dy \\
&= \left[\frac{3y^3}{6} - \frac{y^7}{14} - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{14} - \frac{1}{5} = \frac{35 - 5 - 14}{70} = \frac{8}{35}.
\end{aligned}$$

Příklad 9. Graficky znázorněte množinu M a určete její obsah, je-li

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, 2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x\right\}. \tag{34}$$

Řešení: Nejprve určíme množinu M. První nerovnice $0 \leq y$ vymezuje polorovinu nad osou x, která zahrnuje i osu x. Druhá nerovnice $y \leq x$ určuje polorovinu pod přímkou $y = x$, která rovněž zahrnuje tuto přímku. Třetí nerovnici $2x \leq x^2 + y^2$ můžeme doplněním na čtverec upravit na tvar $1 \leq (x-1)^2 + y^2$, což popisuje vnějšek kruhu se středem v bodě $[1, 0]$ a poloměrem 1. Podobně upravíme poslední nerovnici $x^2 + y^2 \leq 6x$ na tvar $(x-3)^2 + y^2 \leq 9$, což představuje kruh se středem v bodě $[3, 0]$ a poloměrem 3. Výsledný geometrický útvar je znázorněn na obrázku 6.



Obrázek 6: Množina M z příkladu 9.

Obsah množiny M je roven

$$S = \iint_M 1 \, dx \, dy. \tag{35}$$

Pro výpočet tohoto integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi. \tag{36}$$

Jakobián pro tuto substituci je $J = r$. Úhel ϕ nabývá hodnot od 0 do $\pi/4$, protože přímka $y = 0$ ohraničující M odpovídá úhlu 0 a druhá přímka $y = x$ odpovídá úhlu $\pi/4$. Proměnná r vyjadřuje vzdálenost bodů množiny od počátku. Meze pro proměnnou r jsou závislé na úhlu ϕ a odvodíme je tak, že dosadíme vztahy (36) do zadané podmínky $2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x$. Dostaneme

$$2r \cos \phi \leq r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi = r^2 \leq 6r \cos \phi. \tag{37}$$

Po vydělení r získáme

$$2 \cos \phi \leq r \leq 6 \cos \phi. \tag{38}$$

V integrálu proto použijeme pro proměnnou r meze $2\cos\phi$ a $6\cos\phi$. Nyní provedeme substituci a dostaneme:

$$\begin{aligned} S &= \iint_M 1\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2\cos\phi}^{6\cos\phi} r\,dr\,d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{2\cos\phi}^{6\cos\phi} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{36-4}{2}\cos^2\phi\,d\phi = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\phi\,d\phi. \end{aligned} \tag{39}$$

Použijeme goniometrický vzorec $\cos^2\phi = (1+\cos 2\phi)/2$:

$$S = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\phi}{2}\,d\phi = 16\left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 16\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = 2\pi + 4. \tag{40}$$

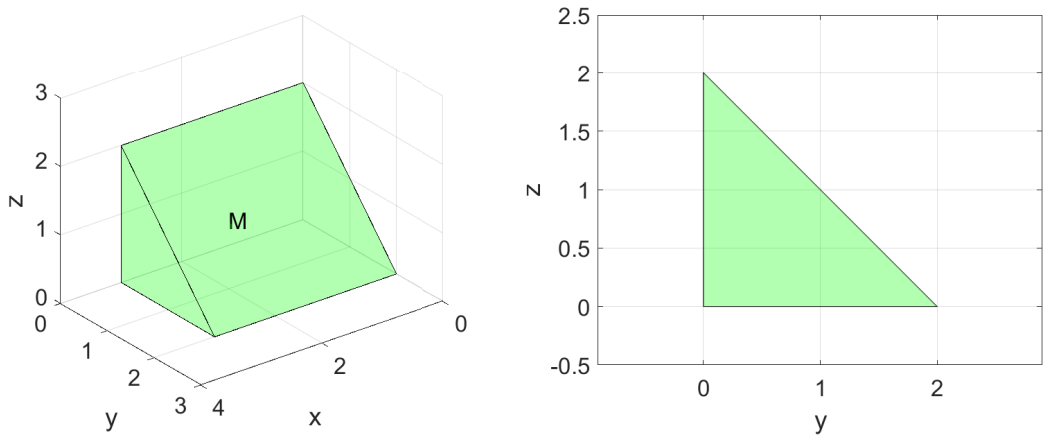
Obsah zadané množiny M je tedy $2\pi + 4$.

Příklad 10. Vypočtěte

$$\iiint_M xy\,dx\,dy\,dz, \tag{41}$$

kde $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2-y, 0 \le x \le 3, y \ge 0\}$.

Řešení: Množina M představuje hranol s trojúhelníkovou podstavou, kterou vymezují přímky $z = 0$, $y = 0$ a $z = 2-y$. Výšku hranolu určuje proměnná x, která nabývá hodnot od 0 do 3. Tento hranol a také jeho průmět do roviny yz je znázorněn na obrázku 7.



Obrázek 7: Množina M z příkladu 10 a její průmět do roviny yz.

Meze pro proměnnou x jsou hodnoty 0 a 3. Proměnná y nabývá hodnot od 0 do 2, což plyne ze zadání a také ze znázornění průmětu do roviny yz na obrázku 7. Meze pro proměnnou z závisejí na y a dle zadání jsou tyto meze 0 a $2-y$. Nyní pomocí Fubiniovy věty vypočteme zadaný integrál:

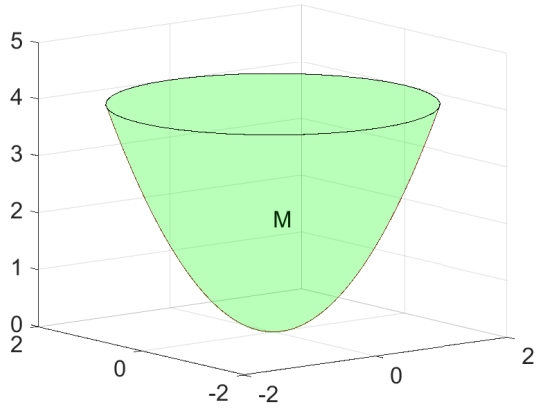
$$\begin{aligned}\iiint_M xy\,dx\,dy\,dz &= \int_0^3\int_0^2\int_0^{2-y} xy\,dz\,dy\,dx = \int_0^3\int_0^2 xy\,[z]_0^{2-y}\,dy\,dz \\ &= \int_0^3\int_0^2 xy\,(2-y)\,dy\,dz = \int_0^3\int_0^2 2xy - xy^2 dy\,dz \\ &= \int_0^3 \left[\frac{2xy^2}{2} - \frac{xy^3}{3}\right]_0^2 dx = \int_0^3 4x - \frac{8x}{3}dx \\ &= \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{8x^2}{6}\right]_0^3 = 18 - 12 = 6.\end{aligned} \tag{42}$$

Příklad 11. Vypočtěte

$$\iiint_M z\,dx\,dy\,dz, \tag{43}$$

kde $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$.

Řešení: Množina M je těleso, které je zdola ohraničeno paraboloidem o rovnici $z = x^2+y^2$ a shora rovinou $z = 4$, viz obrázek 8.



Obrázek 8: Množina M z příkladu 11.

K výpočtu integrálu použijeme substituci do cylindrických souřadnic:

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z. \tag{44}$$

Jakobián pro tuto substituci je $J = r$. Úhel ϕ nabývá hodnot od 0 do 2π a z podmínky $x^2 + y^2 \leq 4$ dostaneme $r^2 \leq 4$ a proto proměnná r nabývá hodnot od 0 do 2. Meze pro z určíme z podmínky $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$ a dostaneme $r^2 \leq z \leq 4$. Platí tedy

$$\begin{aligned}
\iiint_M z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^4 zr\,dz\,d\phi\,dr = \int_0^2\int_0^{2\pi} r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2}^4 d\phi\,dr \\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi} r\frac{16-r^4}{2}d\phi\,dr = \int_0^2\int_0^{2\pi} 8r - \frac{r^5}{2}d\phi\,dr \\
&= \int_0^2 \left(8r - \frac{r^5}{2}\right)\left[\phi\right]_0^{2\pi} dr = \int_0^2 2\pi\left(8r - \frac{r^5}{2}\right) dr \\
&= \pi\int_0^2 16r - r^5 dr = \pi\left[16\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6}\right]_0^2 = \pi\left(32 - \frac{32}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi.
\end{aligned} \tag{45}$$

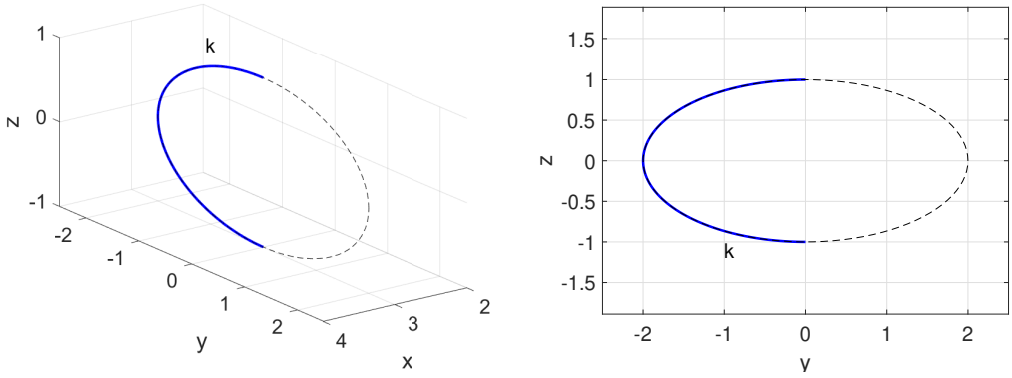
Křivkové integrály

Příklad 12. Vypočtěte

$$\int_k \sqrt{3z^2+1}\,ds, \tag{46}$$

kde $k = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : 4 = y^2 + 4z^2, x = 3, y \leq 0\}$.

Řešení: První rovnici upravíme do tvaru $y^2/4 + z^2 = 1$. Z tohoto tvaru a druhé rovnice vyplývá, že křivka k leží v rovině $x = 3$ a jedná se o elipsu se středem v bodě $[3,0,0]$ a délkami poloos 2 a 1. Poslední podmínka $y \leq 0$ omezuje elipsu na tu část, pro kterou jsou hodnoty y záporné. Tuto křivku můžeme rovněž interpretovat jako průnik eliptického válce definovaného rovnicí $y^2/4+z^2 = 1$ s rovinou $x = 3$, kde navíc platí podmínka $y \leq 0$. Výsledná křivka k a také její průmět do roviny yz jsou zobrazeny na obrázku 9.



Obrázek 9: Křivka k z příkladu 12 a její průmět do roviny yz.

Vzhledem k tomu, že daná křivka je část elipsy využijeme pro určení parametrizace zobecněné polární souřadnice, přičemž proměnná t bude reprezentovat úhel:

$$x = 3,\ y = 2\cos t,\ z = \sin t,\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \tag{47}$$

V této parametrizaci chápeme x, y a z jako funkce proměnné t a určíme derivace těchto funkcí podle t:

$$x'(t) = 0,\ y'(t) = -2\sin t,\ z'(t) = \cos t. \tag{48}$$

Dále určíme velikost tečného vektoru $P'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, k čemuž využijeme vztah $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Dostaneme:

$$\|P'(t)\| = \sqrt{0^2 + 4\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{3\sin^2 t + 1}. \tag{49}$$

Nyní budeme počítat zadaný integrál:

$$\int_k \sqrt{3z^2+1}\,ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{3\sin^2 t+1}\sqrt{3\sin^2 t+1}\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\sin^2 t+1\,dt. \tag{50}$$

Použijeme goniometrický vzorec $\sin^2 t = (1-\cos 2t)/2$ a dostaneme:

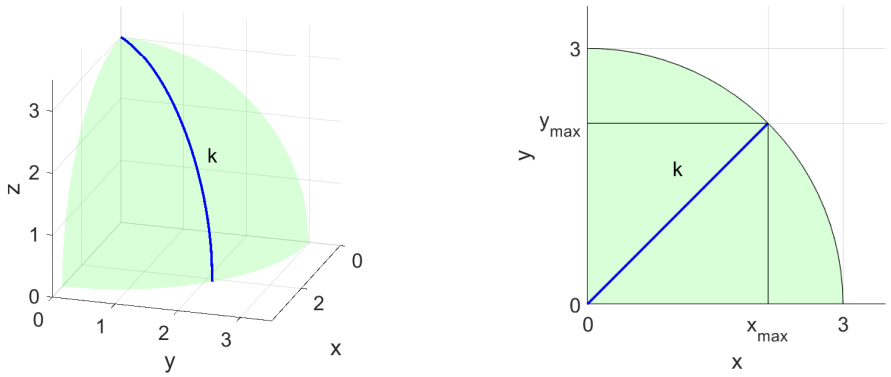
$$\begin{aligned}\int_k \sqrt{3z^2+1}\,ds &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{3\,(1-\cos 2t)}{2}+1\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{5}{2}-\frac{3\cos 2t}{2}\,dt \\ &= \left[\frac{5t}{2}-\frac{3\sin 2t}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{15\pi}{4}-\frac{3\sin 3\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}+\frac{3\sin\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}.\end{aligned} \tag{51}$$

Příklad 13. Vypočtěte

$$\int_k z^2\,dx + x^2\,dy + yz\,dz, \tag{52}$$

kde $k = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9, y = x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ a počáteční bod k je bod $[3,0,0]$.

Řešení: Křivka k leží na kulové ploše popsané rovnicí $x^2+y^2+z^2=9$ v části, kde jsou všechny proměnné nezáporné, tedy v prvním oktantu. Její průmět do roviny xy tvoří část přímky, která je dána rovnicí $y = x$. Jedná se tedy o křivku ležící na kulové ploše nad touto přímkou. Na křivku k můžeme rovněž nahlížet jako na část průniku uvedené kulové plochy a roviny $y = x$ a to část ležící v prvním oktantu. Výsledná křivka k a také její průmět do roviny xy jsou znázorněny na obrázku 10.



Obrázek 10: Křivka k z příkladu 13 a její průmět do roviny xy.

Nyní určíme parametrizaci tak, že položíme $x = t$. Potom z rovnice $y = x$ plyne, že $y = t$. Tuto parametrizaci pro x a y dosadíme do rovnice kulové plochy a dostaneme rovnici $t^2+t^2+z^2 = 9$, ze které plyne, že $z = \sqrt{9-2t^2}$. Dále určíme meze pro t. Vzhledem k tomu, že $t = x$, nabývá t hodnot od 0 do x_{max}, viz znázornění průmětu na obrázku 10. Dle Pythagorovy věty platí $x_{max}^2 + y_{max}^2 = 9$. Podmínka $y = x$ implikuje $y_{max} = x_{max}$ a tedy $x_{max} = 3/\sqrt{2}$. Pokud dosadíme $t = 0$ do parametrizace křivky dostaneme zadaný počáteční bod $[3, 0, 0]$, takže křivka k je souhlasně orientovaná se zvolenou parametrizací. Nyní vypočteme zadaný integrál:

$$\int_k z^2dx + x^2dy + yzdz = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left(9-2t^2\right)\cdot 1 + t^2\cdot 1 + t\sqrt{9-2t^2}\cdot\frac{-4t}{2\sqrt{9-2t^2}}\,dt \tag{53}$$

$$= \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} 9 - 3t^2\,dt = \left[9t - \frac{3t^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{27}{\sqrt{2}} - \frac{27}{2\sqrt{2}} = \frac{27}{2\sqrt{2}}.$$

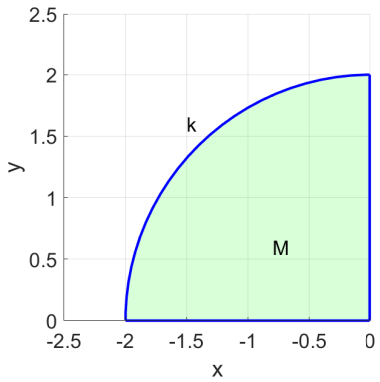
Příklad 14. Vypočtěte

$$\oint_k y^3dx - x^3dy \tag{54}$$

kde k je kladně orientovaná křivka, která tvoří obvod množiny

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\right\}. \tag{55}$$

Řešení: Křivka k a množina M jsou znázorněny na obrázku 11.



Obrázek 11: Křivka k a množina M z příkladu 14.

K výpočtu integrálu použijeme Greenovu větu:

$$\oint_k y^3dx - x^3dy = \iint_M \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^3\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3\right)dx\,dy = \iint_M -3x^2 - 3y^2dx\,dy. \tag{56}$$

Nyní použijeme substituci do polárních souřadnic:

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ r \in [0,2]\,,\ \phi \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right],\ J = r. \tag{57}$$

Dostaneme:

$$\begin{aligned}\oint_k y^3dx - x^3dy &= \int_0^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-3r^2\sin^2\phi - 3r^2\cos^2\phi\right)rd\phi\,dr \\ &= \int_0^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -3r^3d\phi\,dr = -3\int_0^2 r^3\left[\phi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dr = -\frac{3\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = -6\pi.\end{aligned} \tag{58}$$

Příklad 15. Vypočtěte

$$\int_{[0,0]}^{[\pi,3]} \left(\sin(xy) + xy\cos(xy)\right)dx + \left(x^2\cos(xy) + 2y\right)dy. \tag{59}$$

Řešení: Označme $f_1(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$ a $f_2(x,y) = x^2\cos(xy) + 2y$. Vzhledem k tomu, že

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) + x\cos(xy) - x^2y\sin(xy) = 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy) \tag{60}$$

a

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy)\,, \tag{61}$$

platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \quad \forall\,[x,y] \in \mathbb{R}^2. \tag{62}$$

Z toho plyne, že vektorové pole (f_1, f_2) je potenciální v $\mathbb{R}^2$ a zadaný křivkový integrál tedy nezávisí na cestě v $\mathbb{R}^2$.

Integrál určíme pomocí potenciálu u vektorového pole (f_1, f_2). Potenciál u můžeme určit pomocí integrace funkce f_1 podle x nebo integrace funkce f_2 podle y. Zde zvolíme druhou možnost a dostaneme:

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \int f_2(x,y)\,dy = \int x^2\cos(xy) + 2y\,dy \\ &= x^2\frac{\sin(xy)}{x} + y^2 + c(x) = x\sin(xy) + y^2 + c(x)\,.\end{aligned} \tag{63}$$

Funkci $c(x)$ určíme z podmínky $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1$ a dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy) + c'(x) = \sin(xy) + xy\cos(xy)\,. \tag{64}$$

Z toho plyne, že $c'(x) = 0$ a tedy $c(x) = c$, kde c je reálná konstanta. Potenciál vektorového pole (f_1, f_2) je tedy roven

$$u(x, y) = x \sin(xy) + y^2 + c. \tag{65}$$

Potenciál u nyní použijeme k výpočtu integrálu, přičemž konstantu c nemusíme uvažovat. Platí

$$\begin{aligned} & \int_{[0,0]}^{[\pi,3]} (\sin(xy) + xy\cos(xy))\,dx + \left(x^2\cos(xy) + 2y\right)dy \qquad (66) \\ = \quad & \left[u(x, y)\right]_{[0,0]}^{[\pi,3]} = \left[x\sin(xy) + y^2\right]_{[0,0]}^{[\pi,3]} = \pi \sin 3\pi + 9 = 9. \end{aligned}$$

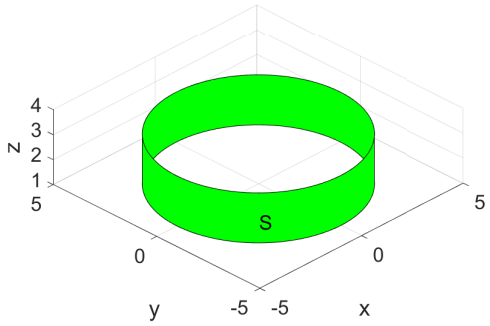
Plošné integrály

Příklad 16. Vypočtěte

$$\iint_S y^2 \, dS, \tag{67}$$

kde $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 16, 1 \leq z \leq 3\}$.

Řešení: Jedná se o rotační válcovou plochu o poloměru 4, jejíž osa rotace je osa z, přičemž tato plocha je omezena na hodnoty z od 1 do 3, viz obrázek 12.



Obrázek 12: Plocha S z příkladu 16.

Určíme parametrizaci plochy S. Proměnné x a y určují kružnici o poloměru 4, proto vzhledem k těmto proměnným použijeme polární souřadnice. Proměnná z na x a y nezávisí. Parametrizace plochy S je tedy dána vztahy:

$$x = 4\cos u,\ y = 4\sin u,\ z = v,\ u \in [0, 2\pi]\,,\ v \in [1, 3]\,. \tag{68}$$

V této parametrizaci chápeme x, y a z jako funkce dvou proměnných u a v. Nyní určíme normálový vektor $\vec{\nu}$ pomocí determinantu matice, která má na druhém řádku derivace funkcí x, y a z podle u a na třetím řádku derivace těchto funkcí podle v. Dostaneme:

$$\vec{\nu} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4\sin u & 4\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4\cos u, 4\sin u, 0)\,. \tag{69}$$

Tento vektor má velikost

$$\|\vec{\nu}\| = \sqrt{16\cos^2 u + 16\sin^2 u + 0^2} = 4. \tag{70}$$

Nyní s využitím goniometrického vzorce $(\sin u)^2 = (1-\cos 2u)/2$ vypočítáme zadaný integrál:

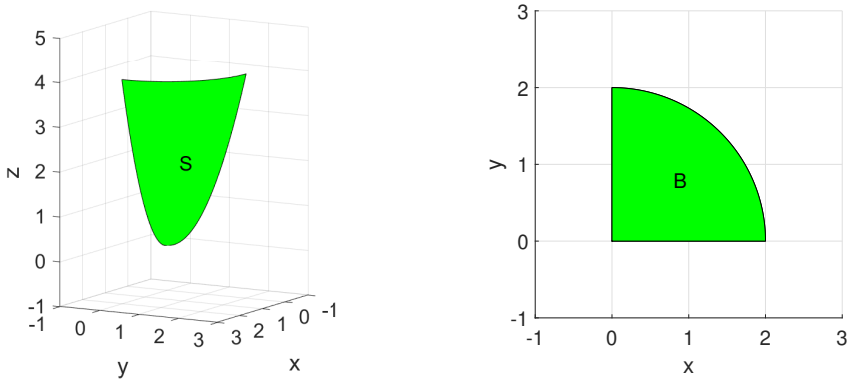
$$\begin{aligned}\iint_S y^2\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_1^3 16\,(\sin u)^2\,4\,dvdu = 64\int_0^{2\pi}\int_1^3 \frac{1-\cos 2u}{2}\,dvdu \\ &= 32\int_0^{2\pi}(1-\cos 2u)\left[v\right]_1^3 du = 64\int_0^{2\pi} 1-\cos 2u\,du \\ &= 64\left[u-\frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{2\pi} = 128\pi.\end{aligned} \tag{71}$$

Příklad 17. Vypočtěte

$$\iint_S x\,dydz + y\,dxdz + zdxdy, \tag{72}$$

kde $S = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2, z \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$. Orientace S je určena normálovým vektorem $\vec{n}\,(1,1,2) = (-2,-2,1)$.

Řešení: Jedná se o rotační paraboloid s vrcholem v počátku, jehož osa rotace je osa z, přičemž uvažujeme pouze tu část, která leží v prvním oktantu a pro kterou jsou hodnoty z menší nebo rovny 4, viz obrázek 13.



Obrázek 13: Plocha S z příkladu 17 a její průmět do roviny xy.

Zvolíme parametrizaci:

$$x = u,\ y = v,\ z = u^2+v^2,\ [u,v] \in B, \tag{73}$$

kde B je průmět S do roviny xy, tedy $B = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$, viz obrázek 13.

Vzhledem k tomu, že $x = u$ a $y = v$, můžeme pro výpočet normálového vektoru zvolit postup:

$$\vec{\nu} = \left(-\frac{\partial z}{\partial u}(u,v), -\frac{\partial z}{\partial v}(u,v), 1 \right) = (-2u, -2v, 1). \tag{74}$$

Normálový vektor $\vec{\nu}$ v bodě $[1,1,2]$, tedy pro $u = v = 1$, má stejnou hodnotu $(-2,-2,1)$ jako zadaný normálový vektor, takže je plocha S souhlasně orientovaná se zvolenou parametrizací. Nyní se již zaměříme na výpočet zadaného integrálu:

$$\begin{aligned} \iint\limits_S x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy &= \iint\limits_S (x,y,z)\,dS \qquad (75)\\ = \iint\limits_B \left(u, v, u^2+v^2\right) \cdot (-2u, -2v, 1)\,dudv &= \iint\limits_B -u^2 - v^2 dudv. \end{aligned}$$

K výpočtu dvojného integrálu na pravé straně použijeme polární souřadnice:

$$u = r\cos\phi,\ v = r\sin\phi,\ r \in [0,2],\ \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ J = r, \tag{76}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} \iint\limits_S x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy &= \int\limits_0^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-r^2\cos^2\phi - r^2\sin^2\phi\right) r\,d\phi dr \qquad (77)\\ &= \int\limits_0^2 -r^3 \left[\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = -\frac{\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = -2\pi. \end{aligned}$$

Příklad 18. Vypočtěte

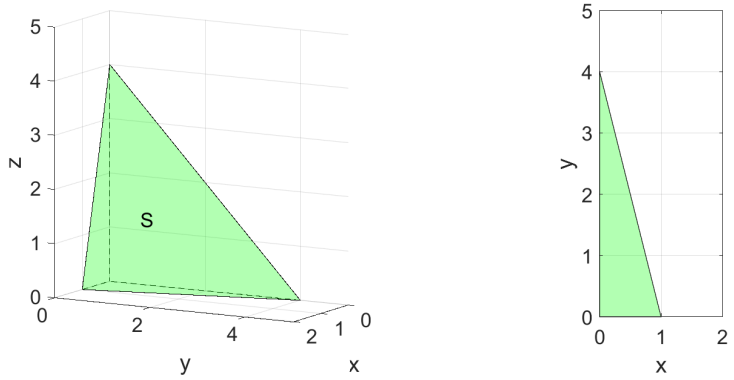
$$\iint\limits_S 2x\,dydz + 2y\,dxdz + 2z\,dxdy, \tag{78}$$

kde S je plocha tvořící povrch čtyřstěnu určeného podmínkami: $4x + y + z \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Normálový vektor určující orientaci S směřuje vně čtyřstěnu. Graficky znázorněte plochu S.

Řešení: Zadaná plocha S a její průmět do roviny xy jsou znázorněny na obrázku 14.

K výpočtu integrálu použijeme Gaussovu-Ostrogradského větu, která daný plošný integrál převádí na trojný integrál na zadaném čtyřstěnu. Nejprve vypočteme divergenci pro vektorové pole $\vec{f} = (2x, 2y, 2z)$:

$$div\,\vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 2 + 2 + 2 = 6. \tag{79}$$



Obrázek 14: Plocha S z příkladu 18 a její průmět do roviny xy.

Určíme meze pro integraci na daném čtyřstěnu. Proměnná x nabývá hodnot od 0 do 1. Trojúhelník, který je průmětem dané plochy do roviny xy je ohraničen přímkou procházející body $[1,0]$ a $[0,4]$, tj. přímkou s rovnicí $y = 4-4x$. Meze pro proměnnou y jsou tedy 0 a $4-4x$. Meze pro proměnnou z jsou dle zadaných podmínek 0 a $4-4x-y$. Pro daný integrál tedy platí:

$$\iint_S 2x\,dydz + 2y\,dxdz + 2z\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{4-4x} \int_0^{4-4x-y} 6\,dzdydx \tag{80}$$

$$= 6\int_0^1 \int_0^{4-4x} [z]_0^{4-4x-y}\,dydx = 6\int_0^1 \int_0^{4-4x} 4-4x-y\,dydx$$

$$= 6\int_0^1 \left[4y - 4xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-4x} dx = 6\int_0^1 16-16x-16x+16x^2-8+16x-8x^2 dx$$

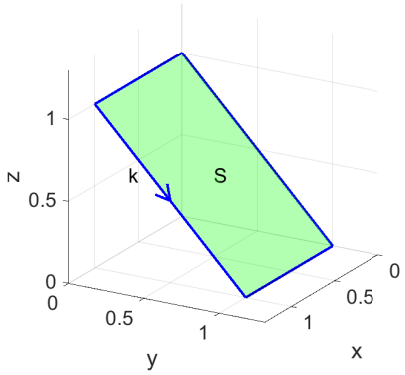
$$= 6\int_0^1 8x^2-16x+8\,dx = 6\left[8\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 8x\right]_0^1 = 16.$$

Příklad 19. Vypočtěte

$$\oint_k z\,dx + x\,dy + y\,dz, \tag{81}$$

kde křivka k tvoří obvod obdélníka s vrcholy $[1,1,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ a $[1,0,1]$ a probíhá vrcholy v uvedeném pořadí.

Řešení: Křivka k a obdélník S, jehož hranici tato křivka tvoří, jsou znázorněny na obrázku 15.



Obrázek 15: Křivka k z příkladu 19 a obdélník S, jehož hranici tato křivka tvoří.

K výpočtu integrálu použijeme Stokesovu větu. Vypočítáme proto nejprve rotaci vektorového pole $\vec{f} = (z, x, y)$:

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1, 1, 1)\,. \tag{82}$$

Za předpokladu, že plochu S orientujeme souhlasně s jejím okrajem k platí, že

$$\oint_k z\,dx + x\,dy + y\,dz = \iint_S (1, 1, 1)\,dS. \tag{83}$$

Rovina S je dána rovnicí $z = 1 - y$ pro $x, y \in [0, 1]$ a má proto parametrizaci:

$$x = u,\ y = v,\ z = 1 - v,\ u \in [0, 1]\,,\ v \in [0, 1]\,. \tag{84}$$

Vzhledem k tomu, že $x = u$ a $y = v$, můžeme pro výpočet normálového vektoru plochy S zvolit postup:

$$\vec{\nu} = \left(-\frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\,, -\frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\,, 1 \right) = (0, 1, 1)\,. \tag{85}$$

Tento normálový vektor má stejný směr jako normálový vektor určující souhlasnou orientaci plochy S s okrajem k, neboť při obíhání po okraji ve směru orientace je tento normálový vektor vlevo. Navrženou parametrizaci použijeme pro výpočet zadaného integrálu:

$$\begin{aligned} \oint_k z\,dx + x\,dy + y\,dz &= \iint_S (1, 1, 1)\,dS = \int_0^1 \int_0^1 (1, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)\,du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2\,dv du = 2. \end{aligned} \tag{86}$$

Řady funkcí a mocninné řady

Příklad 20. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n}. \tag{87}$$

Řešení: V bodě $x = 2$ jsou všechny členy řady nulové a řada tedy konverguje. Pro $x \neq 2$ použijeme limitní podílové kritériu a určíme limitu

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(x-2)^{2(n+1)}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(x-2)^{2n}}{n}\right|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(x-2)^{2n+2}}{(x-2)^{2n}} \cdot \frac{n}{n+1} = (x-2)^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= (x-2)^2 \cdot \frac{1}{1+0} = (x-2)^2. \end{aligned}$$

Daná řada konverguje absolutně pro hodnoty x, pro které je tato limita menší než jedna, a diverguje pro hodnoty x, pro které je tato limita větší než jedna.

Nejprve vyšetříme nerovnost

$$(x-2)^2 < 1. \tag{88}$$

Tato nerovnost je ekvivalentntní s nerovností $|x-2| < 1$, což znamená, že $-1 < x-2 < 1$ a tedy $1 < x < 3$. Řada tedy konverguje na intervalu $(1, 3)$.

Druhá nerovnost

$$(x-2)^2 > 1. \tag{89}$$

je ekvivalentntní s nerovností $|x-2| > 1$, což znamená, že $x-2 < -1$ nebo $1 < x-2$ a tedy $x < 1$ nebo $x > 3$. Řada tedy diverguje na $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Zbývá rozhodnout o konvergenci v bodech 1 a 3. Dosadíme-li tyto body do zadání dosteneme v obou případech řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{90}$$

K jejímu vyšetření použijeme integrální kritérium. Funkce $f(x) = 1/x$ je na intervalu $[1, \infty)$ kladná, spojitá a nerostoucí, takže předpoklady integrálního kritéria jsou splněny. Platí

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln x\right]_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty. \tag{91}$$

Z toho plyne, že v bodech 1 a 3 zadaná řada diverguje.

Obor bodové konvergence zadané řady je tedy interval $(1, 3)$.

Příklad 21. Určete poloměr konvergence a obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+3}}{n\,3^{2n+1}}. \tag{92}$$

Řešení: Jedná se o mocninnou řadu se středem $a = 2$ a koeficienty $c_n = 1/\left(n3^{2n+1}\right)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Určíme poloměr konvergence:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\,3^{2(n+1)+1}}}{\frac{1}{n\,3^{2n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3^{2n+1}}{3^{2n+3}} \\ &= \frac{1}{3^2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{9}. \end{aligned} \tag{93}$$

Z toho vyplývá, že $R = 9$, řada konverguje na $(a-R, a+R) = (-7, 11)$ a diverguje na $(-\infty, a-R) \cup (a+R, \infty) = (-\infty, -7) \cup (11, \infty)$.

Zbývá vyšetřit konvergenci v bodech -7 a 11. Nejprve se zaměříme na $x = -7$, dosadíme tuto hodnotu do zadané řady a dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-9)^{n+3}}{n\,3^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(-1)^3\,9^n\,9^3}{n\,9^n\,3} = -\frac{9^3}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \tag{94}$$

Jedná se o alternující řadu, proto použijeme Leibnizovo kritérium. Vzhledem k tomu, že posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, řada dle tohoto kritéria konverguje.

Nyní dosadíme do zadané řady hodnotu $x = 11$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n+3}}{n\,3^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n\,9^3}{n\,9^n\,3} = \frac{9^3}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{95}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, jak jsme již vyšetřili v předchozím příkladě.

Dospěli jsme tedy k závěru, že poloměr konvergence zadané řady je $R = 9$ a obor konvergence je interval $[-7, 11)$.

Taylorovy řady

Příklad 22. Vyjádřete funkci $f(x) = \sin x$ pomocí Taylorovy řady se středem v bodě $a = 0$.

Řešení: K určení Taylorovy řady zadané funkce použijeme vzorec

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}. \tag{96}$$

Potřebujeme tedy určit hodnoty derivací funkce f v bodě $a = 0$. Platí

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, \quad f(0) = 0, \\ f'(x) &= \cos x, \quad f'(0) = 1, \\ f''(x) &= -\sin x, \quad f''(0) = 0, \\ f'''(x) &= -\cos x, \quad f'''(0) = -1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, \quad f^{(4)}(0) = 0. \end{aligned} \tag{97}$$

Vzhledem k tomu, že čtvrtá derivace funkce f je stejná jako funkce f, je zřejmé, že se hodnoty budou periodicky opakovat. Hodnoty derivací dosadíme do předpisu a dostaneme:

$$\begin{aligned} T(x) &= 0 \cdot \frac{x^0}{0!} + 1 \cdot \frac{x^1}{1!} + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + 1 \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned} \tag{98}$$

Nyní je potřeba rozhodnout, zda je tato Taylorova řada rovna zadané funkci. K tomu použijeme zbytek Taylorova polynomu

$$R_N(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)(x-a)^{N+1}}{(N+1)!}, \tag{99}$$

kde ξ je číslo ležící mezi středem a a bodem x. Vzhledem k tomu, že derivace funkce f je rovna $\pm\sin x$ nebo $\pm\cos x$, platí $\left|f^{N+1}(\xi)\right| < 1$. Platí tedy, že

$$\lim_{N\to\infty} |R_N(x)| \le \lim_{N\to\infty} \frac{\left|x^{N+1}\right|}{(N+1)!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{100}$$

a proto $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že $f(x) = T(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Funkci $\sin x$ tedy můžeme vyjádřit pomocí Taylorovy řady následovně:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{101}$$

Příklad 23. Vyjádřete funkci $f(x) = \cos x$ pomocí Taylorovy řady se středem v bodě $a = 0$.

Řešení: Budeme postupovat analogicky jako v předchozím příkladě. Určíme hodnoty derivací funkce f v bodě $a = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, \quad f(0) = 1, \\ f'(x) &= -\sin x, \quad f'(0) = 0, \\ f''(x) &= -\cos x, \quad f''(0) = -1, \\ f'''(x) &= \sin x, \quad f'''(0) = 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x, \quad f^{(4)}(0) = 1. \end{aligned} \tag{102}$$

Vzhledem k tomu, že čtvrtá derivace funkce f je stejná jako funkce f, je zřejmé, že se hodnoty budou periodicky opakovat. Hodnoty derivací dosadíme do předpisu a dostaneme:

$$\begin{aligned} T(x) &= 1 \cdot \frac{x^0}{0!} + 0 \cdot \frac{x^1}{1!} - 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot \frac{x^3}{3!} + 1 \cdot \frac{x^4}{4!} + 0 \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned} \tag{103}$$

Nyní je potřeba rozhodnout, zda je tato Taylorova řada rovna zadané funkci. K tomu použijeme zbytek Taylorova polynomu

$$R_N(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)(x-a)^{N+1}}{(N+1)!}, \tag{104}$$

kde ξ je číslo ležící mezi středem a a bodem x. Vzhledem k tomu, že derivace funkce f je rovna $\pm\sin x$ nebo $\pm\cos x$, platí $\left|f^{N+1}(\xi)\right| < 1$. Díky tomu dostaneme vztah

$$\lim_{N\to\infty} |R_N(x)| \le \lim_{N\to\infty} \frac{\left|x^{N+1}\right|}{(N+1)!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{105}$$

Z toho plyne, že $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(x) = 0$ a $f(x) = T(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Funkci $\cos x$ lze tedy vyjádřit pomocí Taylorovy řady:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{106}$$

Příklad 24. Vyjádřete funkci $f(x) = \sin 4x$ pomocí Taylorovy řady se středem $a = 0$.

Řešení: Použijeme vztah (101) pro Taylorovu řadu funkce $\sin(x)$, ve kterém proměnnou x nahradíme výrazem $4x$. Tím získáme vyjádření funkce $\sin 4x$ pomocí její Taylorovy řady:

$$\sin 4x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 16^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{107}$$

Příklad 25. Vyjádřete funkci $f(x) = x \sin x^2$ pomocí Taylorovy řady se středem $a = 0$.

Řešení: Použijeme vztah (101) pro Taylorovu řadu funkce $\sin(x)$, ve kterém proměnnou x nahradíme výrazem x^2. Dostaneme

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{108}$$

Dále vynásobíme tuto rovnost proměnnou x a získáme take vyjádření zadané funkce pomocí Taylorovy řady:

$$x \sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{109}$$

Příklad 26. Vyjádřete funkci $f(x) = \sin^2 x$ pomocí Taylorovy řady se středem $a = 0$.

Řešení: Nejprve použijeme gonimometrický vzorec

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{110}$$

a poté nahrazením proměnné x ve vztahu (106) výrazem $2x$ dostaneme

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{111}$$

Pro funkci $\sin^2 x$ tedy platí, že

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{112}$$

Nyní ještě první člen řady, tedy člen pro $n = 0$, napíšeme zvlášť a dostaneme tak vyjádření funkce $\sin^2 x$ pomocí její Taylorovy řady:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{113}$$

Příklad 27. Vyjádřete funkci $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ pomocí Taylorovy řady se středem $a = 0$.

Řešení: Použijeme vzorec pro goniometrickou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad q \in (-1,1)\,, \tag{114}$$

ve kterém dosadíme $q = -x^3$. Dostaneme

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{3n}, \tag{115}$$

přičemž z podmínky $q \in (-1,1)$ plyne, že $-1 < x^3 < 1$, tj. $x \in (-1,1)$.

Zadanou funkci lze tedy vyjádřit prostřednictvím její Taylorovy řady takto:

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{3n}, \quad x \in (-1,1)\,. \tag{116}$$