EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0

CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329

Matematika 2

Mechatronika

doc. RNDr. Dana Černá, Ph.D.

Číselné řady

- Definice řad a konvergence řad
- Operace s řadami
- Geometrická řada
- Kritéria konvergence řad

Jestliže $a_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$, potom symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme (číselná) řada, a_n nazýváme n-tý člen řady a

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

nazýváme k-tý částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jestliže $a_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{Z}$, potom symbol $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ pro $N \in \mathbb{Z}$ chápeme jako číselnou řadu

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = a_N + a_{N+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

kde $b_n = a_{n+N-1}$.

Jestliže posloupnost částečných součtů konverguje k $s \in \mathbb{R}$, tj. $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s$, potom řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet s. Zapisujeme také

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Říkáme také, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, potom řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Říkáme také, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje, tzn. limita posloupnosti částečných součtů neexistuje nebo není konečná, potom řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Říkáme také, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Přitom rozlišujeme tři případy.

Pokud $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = \infty$, potom řekneme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k ∞.

Pokud $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = -\infty$, potom řekneme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $-\infty$.

Pokud $\lim\limits_{k\to\infty} s_k$ neexistuje, potom také říkáme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje.

Operace s řadami

Věta. Jestliže $C \in \mathbb{R}$, potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} C a_n = C \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Věta. Platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

pokud jsou obě řady na pravé straně konvergentní.

Geometrická řada

Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

kde $a, q \in \mathbb{R}$ se nazývá geometrická řada. Číslo q se nazývá kvocient a a je první člen řady.

Tato řada konverguje, pokud $q \in (-1, 1)$, jinak nekonverguje. Pro $q \in (-1, 1)$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Nutná podmínka konvergence řady

Věta. Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Z této podmínky plyne, že pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ je nenulová nebo neexistuje, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Z této podmínky ale neplyne, že pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí pouze obrácená implikace.

Kritéria konvergence číselných řad

Věta. Limitní podílové kritérium

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Věta. Limitní odmocninové kritérium

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Tato kritéria lze tedy použít k vyšetření absolutní konvergence řad nebo k vyšetřování řad s kladnými členy.

Integrální kritérium - kritérium pro řady s kladnými členy

Věta. Jestliže existuje funkce f spojitá kladná a nerostoucí na $[1, \infty]$, $f(n) = a_n$ pro $n \geq 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\int\limits_1^{\infty} f(x)\, dx < \infty$.

Jestliže $a_n = (-1)^n b_n$, kde $b_n > 0$ pro všechna $n \geq 1$ nebo $b_n < 0$ pro všechna $n \geq 1$, potom se řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývá alternující řada.

Leibnizovo kritérium pro alternující řady

Věta. Jestliže $a_n = (-1)^n b_n$, kde $b_n > 0$ pro všechna $n \geq 1$ nebo $b_n < 0$ pro všechna $n \geq 1$, a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Věta. Srovnávací kritérium

Jestliže $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Jestliže $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Věta: Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, potom tato řada konverguje.

Z absolutní konvergence řady tedy plyne konvergence řady, ale obráceně to neplatí. Z konvergence řady neplyne absolutní konvergence.