EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0

CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329

Matematika 2

Mechatronika

doc. RNDr. Dana Černá, Ph.D.

VEKTOROVÉ PROSTORY

- Definice vektorového prostoru
- Příklady vektorových prostorů
- Lineární kombinace a lineární nezávislost vektorů
- Báze a dimenze vektorového prostoru
- Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

VEKTOROVÉ PROSTORY

Vektorový prostor je množina prvků, pro které je definována operace sčítání vektorů $\oplus$ a operace násobení skalárem $\otimes$ a tyto dvě operace mají určité základní vlastnosti uvedené níže v definici.

Tělesem T budeme v této kapitole rozumět množinu všech reálných čísel $\mathbb{R}$, tj. omezíme se na případ na případ $T = \mathbb{R}$. Prvky tělesa T nazýváme skaláry.

Definice

Neprázdnou množinu V budeme nazývat vektorový prostor nad tělesem T a prvky V budeme nazývat vektory, jestliže jsou na této množině definovány operace sčítání $\oplus : V \times V \to V$ a operace násobení $\otimes : T \times V \to V$, které splňují následující podmínky, tzv. axiomy.

a) $u \oplus v = v \oplus u \;\; \forall u, v \in V$, (komutativita sčítání)
b) $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w) \;\; \forall u, v, w \in V$, (asociativita sčítání)
c) existuje prvek $0 \in V : u \oplus 0 = 0 \oplus u = u \;\; \forall u \in V$, (existence nulového prvku)
d) $\forall u \in V \, \exists v \in V : u \oplus v = 0$, (existence opačného prvku)
e) $\alpha \otimes (\beta \otimes u) = (\alpha \cdot \beta) \otimes u \;\; \forall u \in V, \;\; \forall \alpha, \beta \in T$, (asociativita násobení)
f) $1 \otimes u = u \;\; \forall u \in V$, (invariance při násobení jednotkovým prvkem tělesa T)
g) $(\alpha + \beta) \otimes u = (\alpha \otimes u) \oplus (\beta \otimes u) \;\; \forall u \in V, \;\; \forall \alpha, \beta \in T$, (distributivita násobení vzhledem ke sčítání skalárů)
h) $\alpha \otimes (u \oplus v) = (\alpha \otimes u) \oplus (\alpha \otimes v) \;\; \forall u, v \in V, \;\; \forall \alpha \in T$. (distributivita násobení vzhledem ke sčítání vektorů)

Operace sčítání $\oplus$ a operaci násobení $\otimes$ jsme ve výše uvedené definici odlišili od operace sčítání $+$ a násobení $\cdot$ pro skaláry, například v bodech g) a e) se vyskytují oba typy operací.

Dále budeme používat značení $+$ a $\cdot$ také pro sčítání vektorů $\oplus$ a násobení vektoru skalárem $\otimes$, protože z kontextu je vždy zřejmé, o jaký typ násobení se jedná.

Příklad

Definujme množinu $\mathbb{R}^n = \{u = (u_1, \ldots, u_n), u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}\}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Na této množině dále definujeme operaci sčítání

$$(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

a operaci násobení skalárem

$$\alpha (u_1, \ldots, u_n) = (\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n) .$$

Potom $\mathbb{R}^n$ spolu s těmito operacemi tvoří vektorový prostor.

Příklad

Pro dané $n \in \mathbb{N}$ tvoří množina všech polynomů stupně nejvýše n spolu se standardně definovanou operací sčítání polynomů a násobení polynomu skalárem tvoří vektorový prostor.

Definice

Jestliže množiny V a W tvoří spolu s operacemi $\oplus$ a $\otimes$ vektorový prostor a $W \subset V$, potom řekneme, že W je podprostorem V.

Definice

Jestliže V je vektorový prostor nad tělesem T, $u_1, \ldots u_n \in V$, $c_1, \ldots, c_n \in T$, potom vektor

$$v = c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

nazýváme lineární kombinací vektorů $u_1, \ldots u_n$. Pokud jsou všechny koeficienty $c_1, \ldots, c_n$ nulové, nazývá se lineární kombinace triviální.

Příklad

Vektor $(5, 9)$ je lineární kombinací vektorů $(1, 2)$ a $(2, 3)$, protože platí

$$(5, 9) = 3 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (2, 3)\,.$$

Příklad

Rozhodněte, zda je vektor $u = (1, 6, 2)$ lineární kombinací vektorů $v = (1, 2, 3)$ a $w = (0, 2, 1)$.

Zkusíme najít reálné koeficienty c_1 a c_2, pro které platí

$$u = c_1 v + c_2 w, \tag{1}$$

tedy

$$(1, 6, 2) = c_1\,(1, 2, 3) + c_2\,(0, 2, 1)\,.$$

Tento vztah rozepíšeme po složkách a dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 \\ 6 &= 2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 \\ 2 &= 3 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 \end{aligned} \tag{2}$$

K řešení můžeme použít například Gaussovu eliminaci. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že poslední rovnice $0 = -3$ nemá řešení, nemá ani soustava (2) řešení. Koeficienty c_1 a c_2 splňující (1) tedy neexistují a proto vektor u není lineární kombinací vektorů v a w.

Definice

Řekneme, že vektory $u_1, \dots, u_n$ z vektorového prostoru V jsou lineárně nezávislé, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = 0,$$

platí pouze pro nulové koeficienty $c_i = 0$, $i = 1, \dots n$.

Věta

Vektory $u_1, \dots, u_n$ z vektorového prostoru V nejsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jeden z vektorů lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů.

Definice

Řekneme, že množina vektorů $\{u_1, \dots, u_n\}$ z vektorového prostoru V generuje prostor V, jestliže libovolný vektor $v \in V$ je lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_n$.

Příklad

Rozhodněte, zda jsou vektory $u = (1, 2)$ a $v = (4, 5)$ lineárně nezávislé. Zjistíme, pro jaké koeficienty je lineární kombinace vektorů u a v nulová. Hledáme tedy reálné koeficienty c_1 a c_2, pro které platí

$$c_1 u + c_2 v = 0.$$

Rozepíšeme tento vztah po složkách a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 1 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 &= 0, \\ 2 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 &= 0. \end{aligned}$$

K řešení této soustavy použijeme Gaussovu eliminaci a dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho plyne, že soustava má pouze triviální řešení $c_1 = c_2 = 0$, a dle definice jsou vektory u a v lineárně nezávislé.

Definice

Množina vektorů $\{u_1, \ldots, u_n\}$ z vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže jsou tyto vektory lineárně nezávislé a generují prostor V.

Definice

Maximální počet lineárně nezávislých vektorů v prostoru V nazýváme dimenze V a značíme $\dim V$.

Věta

Dimenze vektorového prostoru V je rovna $n \in \mathbb{N}$ právě tehdy, když báze V má právě n prvků.

Věta

Pro $n \in \mathbb{N}$ platí, že libovolná množina n lineárně nezávislých vektorů prostoru V dimenze n tvoří jeho bázi.

Příklad

Ukážeme, že množina vektorů $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ a $e_3 = (0, 0, 1)$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Nejprve ověříme, že jsou tyto vektory lineárně nezávislé. Určíme pro jaké hodnoty koeficientů c_1, c_2 a c_3 je lineární kombinace těchto vektorů rovna nule, tj.

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = 0.$$

Tento vztah rozepíšeme po složkách a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 &= 0, \\ 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 &= 0, \\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 &= 0, \end{aligned}$$

která má pouze triviální řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Vektory e_1, e_2 a e_3 jsou tedy lineárně nezávislé.

Dále ukážeme, že tyto vektory generují prostor $\mathbb{R}^3$. To znamená, že ověříme, že libovolný vektor $v = (v_1, v_2, v_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ je lineární kombinací vektorů e_1, e_2 a e_3. Hledáme tedy koeficienty c_1, c_2 a c_3 takové, že

$$v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3.$$

Rozepíšeme po složkách a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 &= v_1, \\ 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 &= v_2, \\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 &= v_3, \end{aligned}$$

která má řešení $c_1 = v_1$, $c_2 = v_2$ a $c_3 = v_3$. Ověřili jsme obě podmínky z definice báze a platí tedy, že vektory e_1, e_2 a e_3 tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Tyto vektory se nazývají *jednotkové vektory*.

Příklad

Platí, že vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ má dimenzi n. Podobně jako v předchozím příkladu lze snadno ověřit, že jednotkové vektory

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

jsou lineárně nezávislé. Dále podobně jako v předchozím příkladě platí, že libovolný vektor $v = (v_1, \ldots, v_n)$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů e_1, $e_2, \ldots, e_n$, kde pro koeficienty této lineární kombinace

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$

platí $c_i = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Z toho plyne, že tyto jednotkové vektory tvoří bázi. Protože je jejich počet roven n, je dimenze prostoru $\mathbb{R}^n$ dle předchozí věty rovna n.

Příklad

Rozhodněte, zda vektory $u = (1, 2, 3)$ a $v = (4, 7, 9)$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Vektory u a v netvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, protože jsou pouze dva a báze musí obsahovat právě tři prvky.

Příklad

Rozhodněte, zda vektory $u = (1, 2)$ a $v = (4, 5)$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^2$. V příkladu 11 jsme ukázali, že tyto dva vektory jsou lineárně nezávislé. Vzhledem k tomu, že jsou dva a dimenze prostoru $\mathbb{R}^2$ je také dva, tvoří tyto vektory bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.

Definice

Jestliže $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ je báze vektorového prostoru V a $v \in V$, potom $c_1, c_2, \dots, c_n$ nazýváme souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B, jestliže $v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$.

Věta

Souřadnice vektoru $v \in V$ vzhledem k bázi B vektorového prostoru V jsou určeny jednoznačně.