EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0

CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329

Matematika 2

Mechatronika

doc. RNDr. Dana Černá, Ph.D.

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY MATIC

- Definice determinantu
- Pravidla pro výpočet determinantu
- Definice vlastních čísel a vlastních vektorů
- Výpočet vlastních čísel
- Věty o vlastních číslech

DETERMINANT

Permutací prvků množiny $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ nazýváme uspořádanou n-tici prvků z množiny M, ve které je každý prvek obsažen právě jedenkrát. Množinu všech permutací množiny $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ budeme značit S_n.

Inverzí permutace $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ nazýváme dvojici (i_k, i_l), kde $k < l$ a $i_k > i_l$.

Znaménko permutace π definujeme jako 1, jestliže je počet všech inverzí permutace π sudé číslo, a jako -1, pokud je počet všech inverzí permutace π liché číslo, Znaménko π značíme $\operatorname{sgn} \pi$.

Determinant matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je definován jako číslo

$$\sum_{\pi=(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}.$$

Determinant matice $\mathbf{A}$ značíme $\det \mathbf{A}$ nebo také $|\mathbf{A}|$.

Pro $n = 1$ máme jedinou permutaci (1), jejíž znaménko je 1, takže pro matici $\mathbf{A} = (a_{11})$ platí $|\mathbf{A}| = a_{11}$.

Pro $n = 2$ máme permutace $\pi_1 = (1, 2)$ a $\pi_2 = (2, 1)$, přičemž $\operatorname{sgn} \pi_1 = 1$ a $\operatorname{sgn} \pi_2 = -1$. Takže platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}.$$

Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dostaneme rozepsáním definice tzv. Sarrusovo pravidlo, tj.

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

permutace	inverze	znaménko	člen
$(1,2,3)$		1	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
$(3,1,2)$	$(3,1)\,,(3,2)$	1	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
$(2,3,1)$	$(2,1)\,,(3,1)$	1	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
$(3,2,1)$	$(3,2)\,,(3,1)\,,(2,1)$	- 1	$-a_{13}a_{22}a_{31}$
$(1,3,2)$	$(3,2)$	- 1	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$(2,1,3)$	$(2,1)$	- 1	$-a_{12}a_{21}a_{33}$

Budeme používat značení:

a_{ij} - prvek matice $\mathbf{A}$ v i-tém řádku a j-tém sloupci
$\mathbf{A}_{ij}$ - matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$, pokud vynecháme i-tý řádek a j-tý sloupec
$D_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|$ - tzv. algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$

Věta (Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce)

Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a libovolné $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} D_{ri} = \sum_{i=1}^{n} a_{ir} D_{ir}.$$

Věta

Determinant matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je nulový, právě když je matice $\mathbf{A}$ singulární.

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY MATIC

Matice $\mathbf{A}$ reprezentuje lineární zobrazení, které vektoru $\mathbf{x}$ přiřazuje vektor $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory jsou definovány pro čtvercové matice a jsou to důležité veličiny, které charakterizují toto zobrazení.

Mají široké využití v lineární algebře, numerické matematice, matematické analýze, při řešení soustav lineárních algebraických rovnic, při analýze a transformaci obrazu, popisu pohybu a dalších.

Definice

Jestliže $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, potom číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ (případně $\mathbb{C}$) nazýváme vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, pokud existuje $0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (případně $\mathbb{C}^n$) takový, že platí

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Vektor $\mathbf{x}$ se nazývá vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ.

Definice

Množina všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ se nazývá spektrum matice $\mathbf{A}$. Vlastní číslo, které je v absolutní hodnotě největší se nazývá spektrální poloměr matice.

Rovnici $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ můžeme zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0, \tag{1}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice o rozměrech $n \times n$. Dostali jsem tedy homogenní soustavu (3). Tato soustava má netriviální řešení právě tehdy, když determinant matice soustavy je roven nule, tj.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{2}$$

Vlastní čísla tedy určíme jako řešení rovnice (2).

Definice

Determinant matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ je polynomem stupně n, který nazýváme charakteristický polynom. Pokud je vlastní číslo λ kořenem charakteristického polynomu násobnosti k, potom řekneme, že (algebraická) násobnost vlastního čísla λ je k.

Definice

Maximální počet lineárně nezávislých vektorů příslušných vlastnímu číslu λ se nazývá geometrická násobnost vlastního čísla λ.

Věta

Matice nemá nulové vlastní číslo, právě když je regulární.

Věta

Pokud je matice symetrická a reálná, potom všechna její vlastní čísla jsou reálná.

Věta

Jestliže $z \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, potom $\bar{z}$ je také vlastní číslo matice $\mathbf{A}$.

Příklad

Určíme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Budeme řešit rovnici (2). Dostaneme

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

tedy

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (2-\lambda)^3 - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 4\right) \\ &= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda\right) = (2-\lambda)\,\lambda\,(\lambda-4)\,. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ pro hodnoty $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 0$. Matice $\mathbf{A}$ má vlastní čísla $4, 2$ a 0.
Nyní vypočítáme vlastní vektory příslušné těmto vlastním číslům. Podle definice je vlastní vektor nenulový vektor splňující rovnici $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro první vlastní číslo $\lambda_1 = 4$ dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = c$, $x_2 = c$, $x_3 = 0$ pro $c \in \mathbb{R}$.

Vlastním vektorem matice **A** příslušející vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$ je tedy vektor

$$\mathbf{x}^1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Podobně pro vlastní číslo $\lambda_2 = 2$ dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = c$ pro $c \in \mathbb{R}$. Vlastním vektorem matice **A** příslušející vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2$ je tedy vektor

$$\mathbf{x}^2 = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pro poslední vlastní číslo $\lambda_3 = 0$ dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = c$, $x_2 = -c$, $x_3 = 0$ pro $c \in \mathbb{R}$. Vlastním vektorem matice **A** příslušející vlastnímu číslu $\lambda_3 = 4$ je tedy vektor

$$\mathbf{x}^3 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Příklad

Určíme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 (8 - \lambda)$. Z toho plyne, že matice $\mathbf{A}$ má vlastní číslo $\lambda_1 = 8$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 0$. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 8$ dostaneme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = c$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 3c$ pro $c \in \mathbb{R}$.

Vlastní vektor matice **A** příslušející vlastnímu číslu $\lambda_1 = 8$ je tedy vektor

$$\mathbf{x}^1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

Vlastní vektory příslušné dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$ dostaneme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = -2c_1 - c_2$, $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$ pro $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$ je tedy libovolný nenulový vektor tvaru

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$ násobnosti dva tedy přísluší dva lineárně nezávislé vlastní vektory

$$\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a všechny ostatní vlastní vektory příslušející tomuto vlastnímu číslu jsou jejich lineární kombinací.

Příklad

Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matic

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

Výsledky:

a) Matice **A** má vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -2$ a jim příslušné vlastní vektory

$$\mathbf{x}_1 = c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = c\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

b) Matice **A** má vlastní čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 5$ a jim příslušné vlastní vektory

$$\mathbf{x}_1 = c\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

c) Matice **A** má vlastní čísla $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 3$ a jim příslušné vlastní vektory

$$\mathbf{x}_1 = c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = c\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

.