EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0

CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329

Matematika 2

Mechatronika

doc. RNDr. Dana Černá, Ph.D.

1. SEPARACE PROMĚNNÝCH

Úloha: Určete řešení diferenciální rovnice $y' = f(x)\, g(y)$.

V tomto zápisu chápeme y jako funkci proměnné x. Rovnici můžeme tedy také zapsat následovně:

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)).$$

Pokud $g(y(x)) \neq 0$, potom platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Zintegrujeme obě strany rovnice a dostaneme

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x)\, dx.$$

Použijeme substituci $t = y(x)$, potom $dt = y'(x)\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{g(t)} dt = \int f(x)\, dx.$$

Změníme značení $y = t$. Potom platí

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx.$$

V konkrétní úloze musíme stanovit interval I pro proměnnou x, na kterém mají všechny výše uvedené vztahy smysl, nebo alespoň určit podmínky na x. Musíme také vyšetřit případ $g(y(x)) = 0$.

Při řešení konkrétních příkladů se často používá následující zkrácený zápis.

$$\begin{aligned} y' &= f(x)\,g(y) \\ y' &= \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \\ \frac{1}{g(y)}\,dy &= f(x)\,dx \\ \int \frac{1}{g(y)}\,dy &= \int f(x)\,dx \end{aligned}$$

2. HOMOGENNÍ ROVNICE

Úloha: Určete řešení diferenciální rovnice $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Tuto úlohu řešímě substitucí $z = \frac{y}{x}$, kde y a z jsou funkce proměnné x.

Určíme derivaci funkce $y(x) = x\,z(x)$. Dostaneme $y'(x) = x\,z'(x) + z(x)$.

Do rovnice dosadíme $y = x\,z$ a $y' = x\,z' + z$. Dostaneme rovnici

$$x\,z' + z = f(z),$$

kterou řešíme zpravidla metodou separace proměnných. Řešení původní rovnice y pak určíme dosazením nalezeného řešení z do vztahu $y = x\,z$.

3. LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

Úloha: Určete řešení diferenciální rovnice $y' + a(x)\, y = f(x)$.

Řešení 1: Variace konstanty
Obecné řešení určíme ve tvaru $y = y_H + y_P$ na intervalu I.

Funkce y_H je obecným řešením rovnice s homogenní pravou stranou $y' + a(x)\, y = 0$. Metodou separace proměnných dostaneme

$$y_H = k\, g(x)\,, \text{kde}\, g(x) = e^{-\int a(x)dx}$$

a k je libovolná reálná konstanta.

Funkce y_P se nazývá partikulární řešení a jedná se o jedno konkrétní řešení zadané rovnice, které hledáme ve tvaru $y_P = k(x)\; g(x)$.

Úloha: Určete řešení diferenciální rovnice $y' + a(x)\,y = f(x)$.

Řešení 2: Řešení zadané rovnice hledáme ve tvaru $y = u(x)\,v(x)$. Dostaneme $u'v + uv' + auv = f$, což lze také zapsat jako

$$\left(u' + au\right)v + uv' = f.$$

Nejprve určíme funkci u, pro kterou platí $u' + au = 0$.

Po té určíme funkci v takovou, že $uv' = f$.

Určíme řešení y zadané rovnice dosazením funkcí u a v do vztahu $y = uv$.

4. BERNOULLIOVA ROVNICE

Úloha: Určete řešení rovnice $y' + a(x)\,y + b(x)\,y^n = 0$.

Řešení: Rovnici vydělíme členem y^n a dostaneme

$$y'y^{-n} + a\,y^{1-n} + b = 0.$$

Zavedeme substituci $z = y^{1-n}$. Potom $z' = (1-n)\,y^{-n}y'$ a

$$\frac{z'}{1-n} + a\,z + b = 0.$$

Dostali jsme tedy lineární diferenciální rovnici prvního řádu, kterou vyřešíme například metodou variace konstanty, a po té provedeme zpětnou substituci $y = z^{1/(1-n)}$.