EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0

CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329

Matematika 2

Mechatronika

doc. RNDr. Dana Černá, Ph.D.

NUMERICKÉ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- Metoda bisekce
- Newtonova metoda
- Metoda sečen
- Řešení nelineárních rovnic v Matlabu

NUMERICKÉ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Budeme se zabývat numerickým řešením úlohy:

Určete $x \in [a, b]$, pro které platí $f(x) = 0$, kde f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $f(a) f(b) < 0$.

Existence řešení x je zaručena díky Bolzanově větě, ale řešení této úlohy nemusí být určeno jednoznačně.

Budeme se zabývat metodami:

- Metoda půlení intervalu (metoda bisekce)
- Newtonova metoda (metoda tečen)
- Metoda sečen

1. METODA PŮLENÍ INTERVALU

BOLZANOVA VĚTA: Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, potom existuje bod $x \in (a, b)$ takový, že $f(x) = 0$.

Algoritmus:

while $|f(c)| > \epsilon$ and $|b - a| > \delta$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

if $f(a) \cdot f(c) < 0 \qquad b = c$

else $\qquad a = c$

end

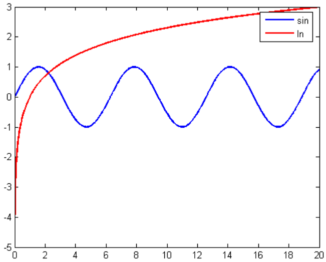
Pro chybu v n-tém kroku platí $|e_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$.

Metoda konverguje lineárně a konverguje vždy.

PŘÍKLAD: Určete všechna řešení rovnice $sin(x) = ln(x)$.

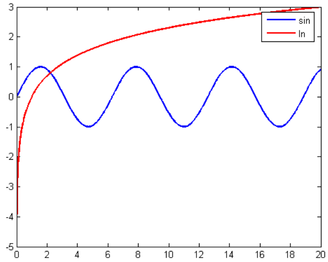
PŘÍKLAD: Určete všechna řešení rovnice $sin(x) = ln(x)$.

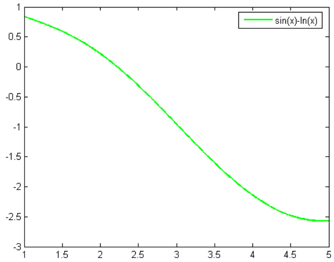
Graf funkce $sin(x)$ a $ln(x)$



PŘÍKLAD: Určete všechna řešení rovnice $sin(x) = ln(x)$.

Budeme numericky řešit rovnici $sin(x) - ln(x) = 0$ na intervalu $[1, 2.5]$.





Počítáme dokud nebude $|a - b| < 10^{-14}$ nebo $|\sin(c) - ln(c)| < 10^{-14}$.

iterace	c
1	1.75000000000000
2	2.12500000000000
3	2.31250000000000
4	2.21875000000000
5	2.26562500000000
6	2.24218750000000
7	2.23046875000000
8	2.22460937500000
$\vdots$	
45	2.21910714891375

2. NEWTONOVA METODA

Zvolme $x_0 \in (a, b)$ blízko přesnému řešení x^* a předpokládejme, že funkce f má na (a, b) spojité derivace až do druhého řádu. Podle věty o Taylorově rozvoji existuje ξ, které leží mezi x a x_0 takové, že platí:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2}.$$

Položme $x = x^*$. Dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\xi)(x^* - x_0)^2}{2} \\ &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0). \end{aligned}$$

Z toho plyne $x^* \approx x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Položme proto $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ a proces opakujme. Dostaneme tak předpis Newtonovy metody.

Newtonova metoda má předpis: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$,

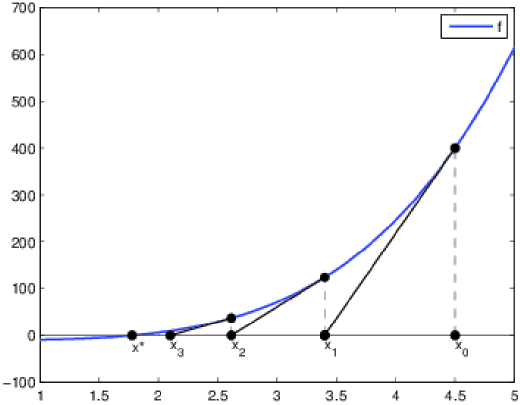
kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x_0 \in [a, b]$ je zvolená počáteční hodnota.

VĚTA: Jestliže funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in [a, b]$ splňují podmínky

- $f(a) f(b) < 0$,
- f' je nenulová na $[a, b]$,
- f'' je spojitá a nemění v $[a, b]$ znaménko,
- $f(x_0) f''(x_0) > 0$,

potom posloupnost vektorů konstruovaná Newtonovou metodou s počátečním bodem x_0 konverguje a platí $|e_{n+1}| \leq C |e_n|^2$. Metoda tedy konverguje kvadraticky.

Geometrická interpretace Newtonovy metody



PŘÍKLAD: Budeme numericky řešit rovnici $sin(x) - ln(x) = 0$ na intervalu $[1, 2.5]$.

Počítáme dokud nebude $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-14}$.

n	x_n
0	1.00000000000000
1	2.83048772171245
2	2.26790221121112
3	2.21974445251704
4	2.21910726324201
5	2.21910714891375
6	2.21910714891375

Newtonovu metodu je možné použít také pro řešení rovnic v komplexním oboru.

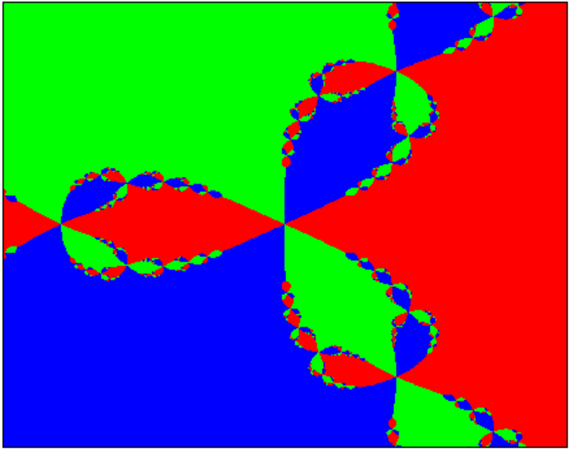
Příklad: Budeme řešit rovnici $z^3 = 1$, kde $z \in \mathbb{C}$. Newtonova metoda má předpis

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

kde $z_0 \in \mathbb{C}$ je zvolená počáteční hodnota.

Daná rovnice má tři kořeny. Bodům $z \in \mathbb{C}$, pro které posloupnost $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ s počáteční hodnotou $z_0 = z$ konverguje ke stejnému kořeni, přiřadíme stejnou barvu a výsledek graficky znázorníme.

Newtonův fraktál



3. METODA SEČEN

V Newtonově metodě nahradíme derivaci přibližnou derivací

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Dostaneme předpis metody sečen:

$x_0 = a$, $x_1 = b$,

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Jestliže f je dvakrát spojitě diferencovatelná, pro přesné řešení x^* platí $f'(x^*) \neq 0$, f'' nemění na $[a, b]$ znaménko a pokud x_0 a x_1 jsou dostatečně blízko x^*, potom metoda konverguje a pro chybu platí $|e_{n+1}| \leq C\,|e_n|^{1.618}$. Metoda tedy konverguje superlineárně.

PŘÍKLAD: Budeme numericky řešit rovnici $sin(x) - ln(x) = 0$ na intervalu $[1, 2.5]$.

Počítáme dokud nebude $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-14}$.

n	x_n
0	1.00000000000000
1	2.50000000000000
2	2.08877583915887
3	2.20960723063542
4	2.21948162311595
5	2.21910614212384
6	2.21910714880757
7	2.21910714891375
8	2.21910714891375

ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC V MATLABU

- Funkce Matlabu pro řešení nelineárních rovnic
- Newtonova metoda
- Metoda sečen

ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC - FUNKCE MATLABU

solve(eqn) - určí řešení rovnice eqn. Určí všechna řešení, pokud se jedná o polynomiální rovnici. Jinak většinou určí maximálně jedno řešení. Tento příkaz je tedy vhodný pouze pro polynomiální rovnice. Je nejprve potřeba nadefinovat symbolickou proměnnou. Příklad použití pro rovnici $x^3 + 1 = 0$:

```
syms x
K=solve(x^3+1==0).
```

Symbolický výsledek uložený do proměnné K můžeme případně převést na typ double pomocí příkazu

```
double(K)
```

U příkazu solve je funkce daná symbolicky a operace +, -, *, /,^, apod. zapisujeme běžným způsobem.

fzero(@(x) f(x), [a,b]) - určí nulový bod funkce f na intervalu [a,b]. Musí být splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Příklad použití:

fzero(@(x) x.^3+1, [0,10]) - není splněna podmínka
fzero(@(x) x.^3+1, [-10,10])

U funkce používané v příkazu fzero nejprve uvedeme znak @, pak v závorkách název proměnné a potom předpis funkce. Zde chápeme x jako vektor a operacemi většinou míníme operace s vektory po složkách, které značíme .*, ./, .^, apod.

Potřebujeme znát intervaly, ve kterých leží kořeny. Ty můžeme určit například pomocí grafu funkce.

Příklad: Určete všechna reálná řešení rovnice $x^2 - 1 = \sin(x)$.
Nejprve převedeme všechny členy rovnice na jednu stranu, dostaneme ekvivalentní rovnici $x^2 - 1 - \sin(x) = 0$.
Vykreslíme graf funkce na levé straně rovnice.

```
x=-3:0.01:3;
plot(x,x.^2-1-sin(x))
grid on
```

Graf protíná osu x ve dvou bodech, jeden z nich leží v intervalu $[-1, 0]$ a druhý v intervalu $[1, 2]$. Určíme tyto kořeny

```
fzero( @(x) x.^2-1-sin(x), [-1,0] )
fzero( @(x) x.^2-1-sin(x), [1,2] )
```

Dostaneme dvě řešení dané rovnice, x=-0.6367 a x=1.4096.

NEWTONOVA METODA

Newtonova metoda pro řešení rovnice $f(x) = 0$ spočívá ve výpočtu posloupnosti hodnot x_n, která konverguje k řešení. Předpis metody je

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

kde $n = 0, 1, 2, \ldots,$ a x_0 je vhodně zvolená počáteční hodnota.

PŘÍKLAD: Určete řešení rovnice $x^2 - 1 = \sin x$ na intervalu $[1, 2]$. Nejprve převedeme všechny členy rovnice na jednu stranu, dostaneme ekvivalentní rovnici $x^2 - 1 - \sin x = 0$ a tedy $f(x) = x^2 - 1 - \sin x$.

Platí $f'(x) = 2x - \cos x$ a předpis Newtonovy metody má tedy tvar

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1 - \sin x_n}{2x_n - \cos x_n}.$$

Zvolme počáteční hodnotu x_0 z intervalu $[1, 2]$, například $x_0 = 1$. Dostaneme

$x_1 = 1.5765,$
$x_2 = 1.4228,$
$x_3 = 1.4097,$
$x_4 = 1.4096.$

Po čtyřech iteracích je tedy přibližná hodnota $x_4 = 1.4096$. Pro posouzení relevantnosti řešení dosadíme tuto hodnotu do zadání a zjistíme, že rozdíl mezi levou a pravou stranou rovnice je $x_4^2 - 1 - \sin x_4 = 1.3949\,10^{-8}$.

Kritéria ukončení iterací

1. $|f(x)| < tol$, kde tol je zvolená tolerance.
2. $|x_{n+1} - x_n| < tol$, kde tol je zvolená tolerance.
3. Počet kroků je roven zadanému maximálnímu počtu kroků.