EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0

CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329

Matematika 2

Mechatronika

doc. RNDr. Dana Černá, Ph.D.

NUMERICKÁ INTEGRACE

- Newton–Cotesovy vzorce
- obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo
- odhad chyby metodou polovičního kroku
- numerické experimenty, příklad
- funkce Matlabu pro výpočet integrálu

NUMERICKÁ INTEGRACE

Úloha: Vypočtěte

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a f je reálná funkce definovaná na $[a, b]$.

Metody výpočtu:

- výpočet pomocí primitivní funkce k funkci f (symbolický výpočet)
- výpočet pomocí Taylorovy řady funkce f
- numerický výpočet

Numerická integrace se také nazývá kvadratura, zejména pokud se jedná o funkce jedné proměnné. Numerická integrace funkce více proměnných se také nazývá kubatura.

PŘ. $\int\limits_0^1 \cos x\, dx = [\sin x]_0^1 = \sin 1$ - výpočet pomocí primitivní funkce

PŘ. výpočet pomocí Taylorovy řady

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 e^{x^2} dx &= \int\limits_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_0^1 x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, n!} \end{aligned}$$

PŘ. $\int\limits_1^5 \operatorname{arctg} \ln \sqrt{x^2 + 8}\, dx$ - je nutné řešit numericky

NUMERICKÁ INTEGRACE

Daný integrál budeme počítat přibližně pomocí součtu:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

kde $x_i \in [a, b]$ se nazývají uzly, $w_i \in \mathbb{R}$ se nazývají váhy.

Výraz

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

se nazývá kvadraturní vzorec.

Chybu budeme definovat předpisem $E(f) = I(f) - Q(f)$.

Řekneme, že kvadraturní vzorec $Q(f)$ je řádu k, jestliže platí $E(P) = 0$ pro všechny polynomy P stupně nejvýše k.

(JEDNODUCHÉ) NEWTON-COTESOVY VZORCE

Definujme krok metody $h = (b-a)/n$. Budeme uvažovat ekvidistantní uzly $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$, nebo $x_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) h$, $i = 1, \dots, n$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx,$$

kde L_n je Lagrangeův interpolační polynom stupně n pro funkci f a dané uzly.

Tento polynom lze vyjádřit v tzv. Lagrangeově tvaru

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i),$$

kde

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}.$$

Platí

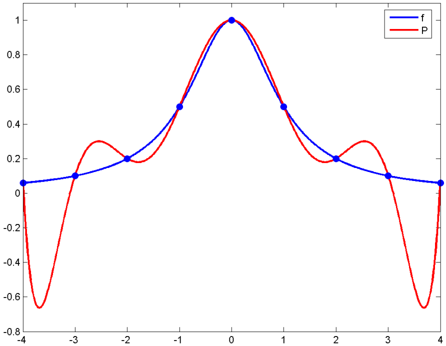
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \int_a^b L_n(x)\,dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, f(x_i)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,dx.\end{aligned}$$

Newtonovy-Cotesovy vzorce mají tvar

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i), \quad \text{kde } w_i = \int_a^b l_i(x)\,dx.$$

Newton-Cotesovy vzorce mají pro danou volbu ekvidistantních uzlů maximální řád.

Při interpolaci polynomy vyšších stupňů může dojít k velkým chybám na okrajích intervalu, proto se Newton-Cotesovy vzorce vyšších řádů příliš nepoužívají.



Pro konkrétní volbu stupně Lagrangeova interpolačního polynomu a volbu uzlů dostaneme konkrétní metodu:

- $n = 0$ Obdélníkové pravidlo
- $n = 1$ Lichoběžníkové pravidlo
- $n = 2$ Simpsonovo pravidlo (Simpsonovo $1/3$ pravidlo)
- $n = 3$ Simpsonovo $3/8$ pravidlo

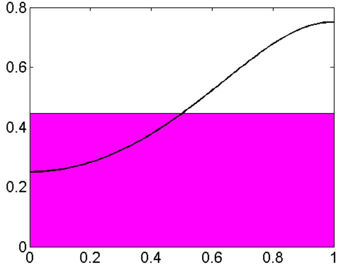
1. OBDÉLNÍKOVÉ PRAVIDLO

Pro $n = 0$ a $x_0 = \frac{a+b}{2}$ má Lagrangeův interpolační polynom tvar

$$L_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Z toho odvodíme kvadraturní vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_0(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$



Je-li $f \in C^2([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že pro chybu platí

$$E(f) = \int_a^b f(x) - L_0(x)\, dx = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24} (b-a)^3 .$$

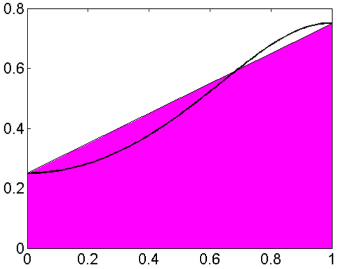
2. LICHOBĚŽNÍKOVÉ PRAVIDLO

Pro $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, má Lagrangeův interpolační polynom tvar

$$L_1(x) = f(a)\frac{(x-b)}{(a-b)} + f(b)\frac{(x-a)}{(b-a)}.$$

Z toho odvodíme kvadraturní vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_1(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$



Je-li $f \in C^2([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že pro chybu platí

$$E(f) = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)^3 .$$

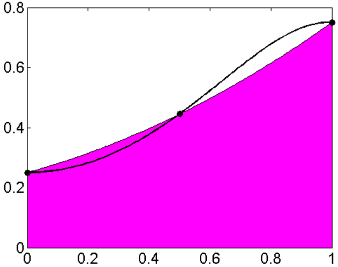
3. SIMPSONOVO PRAVIDLO

Pro $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, $h = (b - a)/2$ platí

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Z toho odvodíme kvadraturní vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$



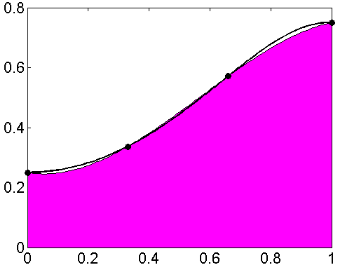
Je-li $f \in C^4([a,b])$, potom existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že pro chybu platí

$$E(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5.$$

4. SIMPSONOVO 3/8 PRAVIDLO

Pro $n = 3$, $h = \frac{b-a}{3}$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $x_3 = b$ platí

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right).$$



Je-li $f \in C^4([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že

$$E(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5.$$

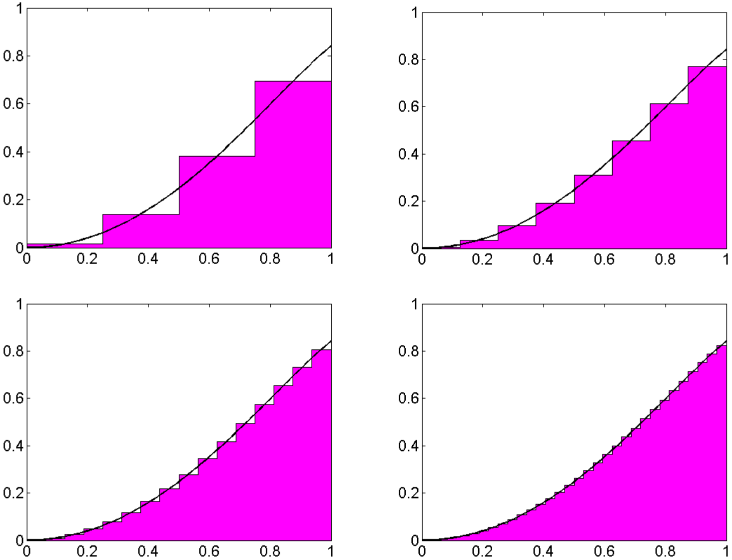
1. (SLOŽENÉ) OBDÉLNÍKOVÉ PRAVIDLO

Rozdělíme interval $[a, b]$ na n podintervalů stejné délky $h = \frac{b-a}{n}$, označíme středy podintervalů $x_1, \ldots, x_n$, tj. $x_i = a + (i - 1/2)\, h$, a na každém podintervalu použijeme obdélníkové pravidlo. Dostaneme tzv. složené obdélníkové pravidlo

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

Je-li $f \in C^2([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že pro chybu platí

$$E(f) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24} (b-a)\, h^2.$$



0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

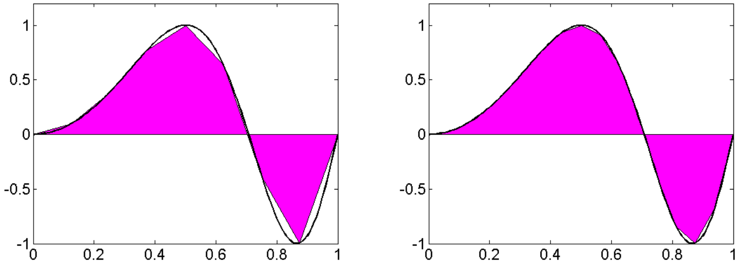
2. (SLOŽENÉ) LICHOBĚŽNÍKOVÉ PRAVIDLO

Rozdělíme interval $[a, b]$ na n podintervalů stejné délky $h = \frac{b-a}{n}$, označíme $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$ a na každém podintervalu použijeme lichoběžníkové pravidlo. Dostaneme tzv. složené lichoběžníkové pravidlo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Je-li $f \in C^2([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že pro chybu platí

$$E(f) = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)h^2.$$


1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

3. (SLOŽENÉ) SIMPSONOVO PRAVIDLO

Rozdělíme interval $[a, b]$ na n podintervalů stejné délky $h = \frac{b-a}{n}$, kde n je sudé, označíme $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$ a na každém podintervalu $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ použijeme jednoduché Simpsonovo pravidlo. Dostaneme tzv. složené Simpsonovo pravidlo

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_1) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Je-li $f \in C^4([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že pro chybu platí

$$E(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4.$$

4. (SLOŽENÉ) SIMPSONOVO 3/8 PRAVIDLO

Rozdělíme interval $[a, b]$ na n podintervalů stejné délky $h = \frac{b-a}{n}$, n je dělitelné 3, označíme $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$ a na každém podintervalu $[x_{3i}, x_{3i+3}]$ použijeme jednoduché Simpsonovo 3/8 pravidlo, dostaneme tzv. složené Simpsonovo 3/8 pravidlo

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + f(x_m) + 3\sum_{k=1}^{n/3}(f(x_{3k-1}) + f(x_{3k-2})) + 2\sum_{k=1}^{n/3-1} f(x_{3k})\right]$$

Je-li $f \in C^4([a, b])$, potom pro chybu platí

$$E(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}(b-a)h^4.$$

ODHAD CHYBY METODOU POLOVIČNÍHO KROKU

Nyní označme Q_h kvadraturní vzorec pro krok h a předpokládejme, že chyba E_h je pro tento vzorec p-tého řádu.

Potom platí

$$\begin{aligned} E_h &= I - Q_h \approx Ch^p \\ E_{2h} &= I - Q_{2h} \approx C\,(2h)^p \end{aligned}$$

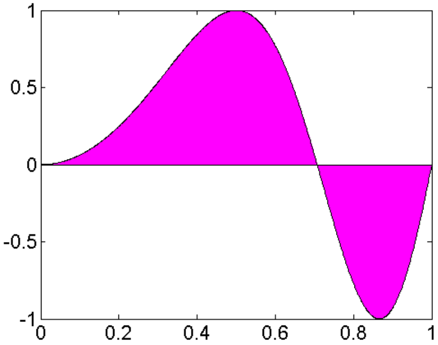
Vypočteme $E_{2h} - E_h$ a dostaneme $Q_h - Q_{2h} \approx Ch^p\,(2^p - 1)$. Z toho plyne, že

$$C \approx \frac{Q_h - Q_{2h}}{h^p\,(2^p - 1)}.$$

Dosadíme C do vztahů pro E_h a E_{2h} a dostaneme

$$E_h \approx \frac{Q_h - Q_{2h}}{2^p - 1} \quad \text{a} \quad E_{2h} \approx \frac{(Q_h - Q_{2h})\,2^p}{2^p - 1}.$$

PŘÍKLAD: Vypočtěte $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(2\pi x^2\right)\,dx$.



n	obdélníkové	lichoběžníkové	Simpsonovo
16	**0.1**6962518890597	**0.17**584107153707	**0.171**52825575011
32	**0.171**19420389884	**0.17**273313022152	**0.171**69714978300
64	**0.171**57986357475	**0.171**96366706018	**0.171707**17933974
128	**0.171**67587226279	**0.1717**7176531747	**0.171707**79806989
256	**0.171**69984913705	**0.1717**2381879013	**0.17170783**661435
512	**0.17170**584177594	**0.1717**1183396359	**0.171707839**02141
1024	**0.171707**33983695	**0.17170**883786976	**0.1717078391**7182
2048	**0.171707**71434604	**0.17170**808885336	**0.17170783918**122

FUNKCE MATLABU PRO VÝPOČET INTEGRÁLU

- int(f, a, b)
  - symbolický výpočet integrálu funkce f na intervalu $[a, b]$, tj. určí analytické řešení.
- integral(@(x)$f(x)$, a, b),
  integral(@(x)$f(x)$, a, b,'RelTol',*tol*)
  - numerický výpočet integrálu funkce f na intervalu $[a, b]$; lze nastavit toleranci *tol* pro relativní chybu.
- trapz(x,y)
  - výpočet integrálu pomocí lichoběžníkového pravidla; vhodné pokud neznáme předpis funkce f a jsou dány pouze hodnoty f v diskrétních bodech; vektor x určuje body a vektor y určuje hodnoty funkce f v těchto bodech.

Příklad 1. Určíme symbolicky $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \mathrm{d}x$.

Zavedeme symbolickou proměnnou x a vypočteme integrál pomocí příkazů

```
syms x
I=int( atan(x), 0, 1)
```

Výsledek je $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Pokud bychom chtěli tento výsledek převést na reálné číslo, tedy proměnnou typu double, stačí použít

```
double(I)
```

Symbolické výpočty lze použít pouze pro některé jednodušší typy integrálů, protože pro mnoho integrálů nelze výsledek zapsat pomocí elementárních funkcí. Další nevýhodou je to, že symbolické výpočtu jsou relativně pomalé, což hraje roli zejména tehdy, když počítáme více intergrálů.

Příklad 2. Určíme $\int_0^1 \operatorname{arctg} x^2 \, \mathrm{dx}$ numericky.

Nastavíme výpis na více cifer a vypočteme integrál pomocí příkazů

```
format long
integral( @(x) atan(x.^2), 0, 1)
```

Zde nahlížíme na x jako na vektor a operace zpravidla provádíme po složkách. Takže zde použijeme $x.\hat{}2$ a nikoli $x\hat{}2$. Podobně je tomu například u násobení a dělení. Výchozí nastavení tolerance pro relativní chybu je 10^{-6}. Pokud bychom chtěli počítat s jinou tolerancí, například 10^{-12}, zadáme

```
integral( @(x) atan(x.^2), 0, 1, 'RelTol', 10^-12 )
```

Výsledek se v tomto případě výrazně nezměnil, protože již první výsledek byl dostatečně přesný.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_0^{0.7} f(x)\,dx,$$

jestliže funkce f nabývá v bodech 0; 0,1; 0,2; 0,6; 0,7 postupně hodnoty 1,1; 1,3; 1,5; 1,9; 1,6.

Nadefinujeme vektor x, jehož složky jsou zadané body, a vektor y, jehož složky jsou hodnoty funkce f postupně v zadaných bodech.

```
x=[0 0.1 0.2 0.6 0.7]
y=[1.1 1.3 1.5 1.9 1.6]
```

Potom vypočteme hodnotu zadaného integrálu pomocí příkazu

```
trapz(x,y)
```