EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0

CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329

Matematika 2

Mechatronika

doc. RNDr. Dana Černá, Ph.D.

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ODR S POČÁTEČNÍMI PODMÍNKAMI

- ODR, existence a jednoznačnost, převod na soustavu
- Obecné jednokrokové metody
- Eulerova metoda
- Stabilita metod
- Odhad chyby metodou polovičního kroku
- Řešení rovnic v Matlabu
- Sférické kyvadlo

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ODR S POČÁTEČNÍMI PODMÍNKAMI

Zkratka ODR znamená obyčejná diferenciální rovnice.

Úloha: Určete řešení soustavy ODR prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ &\ldots \\ y_m' &= f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \end{aligned} \tag{1}$$

na intervalu $[a, b]$ s počátečními podmínkami

$$y_1(a) = p_1, y_2(a) = p_2, \ldots, y_m(a) = p_m. \tag{2}$$

Řekneme, že reálné funkce jedné proměnné $y_1, y_2, \ldots, y_m$ jsou na $[a, b]$ řešením soustavy (1) s podmínkami (2), jestliže jsou spojité na $[a, b]$, mají spojité derivace na (a, b), splňují soustavu (1) na (a, b) a podmínky (2).

Danou soustavu s počátečními podmínkami můžeme zapsat také vektorově:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}\right) \text{ pro } x \in \left[a, b\right], \quad \mathbf{y}\left(a\right) = \mathbf{p}.$$

Pro $m = 1$ dostáváme jednu obyčejnou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y' = f\left(x, y\right) \text{ pro } x \in \left[a, b\right], \quad y\left(a\right) = p.$$

Úmluva: Budeme metody formulovat pro jednu diferenciální rovnici, pro soustavu platí analogicky.

PŘÍKLAD: Určete řešení rovnice $y' = y^2$ na intervalu $[0, 2]$, $y(0) = 1$.

Metodou separace proměnných dostaneme $y = \frac{1}{1-x}$. Tato funkce není definována v bodě 1. Na intervalu $[0, 2]$ rovnice nemá řešení.

PŘÍKLAD: Určete řešení rovnice $y' = \sqrt{y}$ na intervalu $[0, 1]$, $y(0) = 0$.

Daná rovnice má dvě řešení $y = 0$ a $y = \frac{x^2}{4}$.

Řešení dané úlohy nemusí existovat nebo nemusí být určeno jednoznačně.

Postačující podmínka existence a jednoznačnosti řešení

VĚTA: Jestliže jsou funkce $f_1, f_2, \ldots, f_m$, spojité na $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ a mají na tomto intervalu spojité a omezené parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \ldots, m$, potom existuje právě jedno řešení $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ soustavy (1) s počáteční podmínkou (2).

ODR m-tého řádu

$$y^{(m)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}\right)$$

s počátečními podmínkami

$$y(a) = p_1, y'(a) = p_2, \ldots, y^{(m-1)}(a) = p_m,$$

lze pomocí substituce

$$y_1 = y, y_2 = y', \ldots, y_m = y^{(m-1)},$$

převést na soustavu ODR prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_m' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$y_1(a) = p_1, y_2(a) = p_2, \ldots, y_m(a) = p_m.$$

JEDNOKROKOVÉ METODY

Úloha: Určete řešení soustavy ODR $y' = f(x, y)$, $x \in [a, b]$, $y(a) = p$.

Rozdělme interval $[a, b]$ na N podintervalů délky $h = \frac{b-a}{N}$, h se nazývá integrační krok metody. Krajní body podintervalů se nazývají uzly metody. Označíme je $x_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$. Budeme hledat hodnoty přibližného řešení v uzlech, přibližnou hodnotu řešení v uzlu x_n označíme y_n.
Jednokrokové metody mají předpis:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad y_0 = p.$$

Funkce Φ se nazývá přírůstková funkce.

Přesné řešení dané úlohy označme y^*.

$e_n(h) = y_n - y^*(x_n)$ se nazývá celková diskretizační chyba.

$\delta_n(h) = \frac{y^*(x_{n+1}) - y^*(x_n)}{h} - \Phi(x_n, y^*(x_n), h)$ se nazývá lokální relativní diskretizační chyba.

Řekneme, že metoda je p-tého řádu, jestliže $|\delta_n(h)| \leq Ch^p$, kde C je konstanta nezávislá na h.

Mezi jednokrokové metody patří

- Eulerova metoda
- Rungovy-Kuttovy metody

1. EULEROVA METODA

Taylorův rozvoj funkce y se středem x_n má tvar

$$y\left(x_{n+1}\right) = y\left(x_n\right) + y'\left(x_n\right)\left(x_{n+1} - x_n\right) + \frac{y''\left(\xi\right)}{2}\left(x_{n+1} - x_n\right)^2,$$

pro nějaké (neznámé) $\xi \in [x_n, x_{n+1}]$.

Dosazením $y_n \approx y\left(x_n\right)$, $y'\left(x_n\right) = f\left(x_n, y_n\right)$, $h = x_{n+1} - x_n$ dostaneme

$$y_{n+1} = y_n + f\left(x_n, y_n\right) h + \mathcal{O}\left(h^2\right)$$

Z toho odvodíme předpis Eulerovy metody:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right), \quad y_0 = p.$$

Z uvedeného Taylorova rozvoje určíme vztah pro lokální relativní diskretizační chybu:

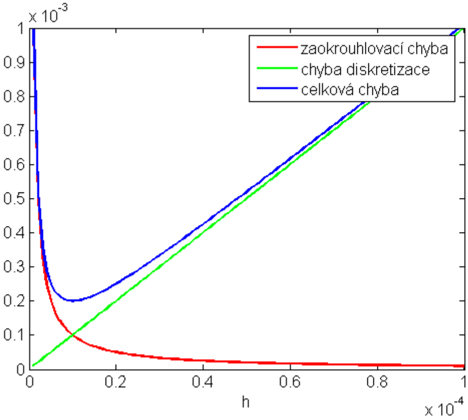
$$\begin{aligned}
\delta_n(h) &= \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, y(x_n), h) \\
&= \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - y'(x_n) = \frac{y''(\xi)}{2} h.
\end{aligned}$$

Z toho plyne, že

$$|\delta_n(h)| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]} |y''(x)|}{2} h = Ch.$$

Z toho plyne, že Eulerova metoda je prvního řádu.

Zaokrouhlovací chyba u jednokrokových metod většinou závisí nepřímo úměrně na velikosti integračního kroku, lze ji přibližně vyjádřit jako $\frac{C}{h}$.
Chybu nelze neomezeně zmenšovat, lze dosáhnou pouze určité mezní přesnosti.



PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -101y$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 2$ Eulerovou metodou s krokem $h = 0,02$.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -101y$, $x \in [0,1]$, $y(0) = 2$ Eulerovou metodou s krokem $h = 0,02$.

ŘEŠENÍ: Definujme $x_i := 0,02i$, $y_i \approx y(x_i)$.

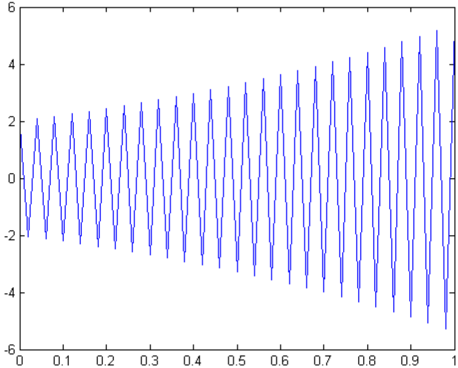
Daná metoda má předpis

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n - 101 \cdot 0,02\ y_n = -1,02y_n,\ \ y_0 = 2.$$

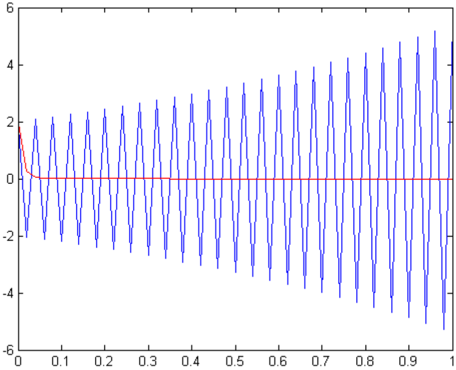
Potom

$$\begin{aligned}
y_1 &= -1,02 \cdot 2 = -2,04 \\
y_2 &= -1,02 \cdot (-2,04) = 2,0808 \\
y_3 &= -1,02 \cdot 2,0808 = -2,1224 \\
y_4 &= -1,02 \cdot 2,1224 = 2,1649
\end{aligned}$$

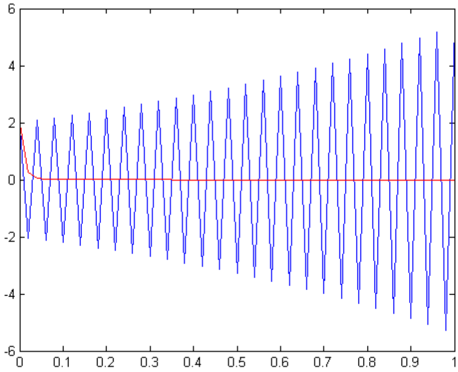
graf přibližného řešení



Přesné řešení dané rovnice je funkce $y^*(x) = 2e^{-101x}$, $x \in [0, 1]$.



Přesné řešení dané rovnice je funkce $y^*(x) = 2e^{-101x}$, $x \in [0, 1]$.



Eulerova metoda pro danou rovnici a danou volbu kroku je nestabilní. Musíme zvolit menší integrační krok.

Volba integračního kroku

Pro velký integrační krok nemusí být výsledek dostatečně přesný nebo metoda může být nestabilní.

Pro velmi malý integrační krok může být daná metoda příliš výpočetně náročná nebo může dojít ke katastrofální kumulaci zaokrouhlovacím chyb.

Interval absolutní stability jednokrokových metod (zjednodušeně)

Každou jednokrokovou metodu charakterizuje interval absolutní stability.

Jestliže je $\lambda < 0$, kde λ je odhad $\frac{\partial f}{\partial y}$, potom volíme integrační krok h tak, aby $h\lambda$ leželo v intervalu absolutní stability. Jinak by daná metoda nebyla stabilní.

Jestliže je $\lambda > 0$, potom volíme integrační krok nezávisle na intervalu absolutní stability.

Interval absolutní stability Eulerovy metody je interval $(-2, 0)$.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -101y$, $x \in [0,1]$, $y(0) = 2$ Eulerovou metodou. Pro jakou volbu kroku je Eulerova metoda pro tuto rovnici stabilní?

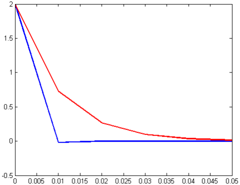
$f(x,y) = -101y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -101$.

Podmínka $-101h \in (-2,0)$ je splněna pro $h \in (0; 2/101) = (0; 0,0198)$.

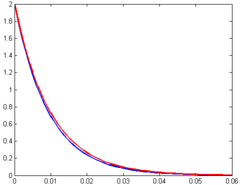
Eulerova metoda je pro danou rovnici stabilní, pokud krok h je menší než $0,0198$.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -101y$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 2$ Eulerovou metodou.

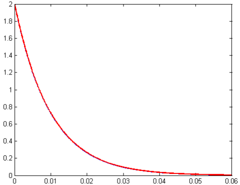
$h = 0,01$
$N = 100$



$h = 0,001$
$N = 1000$



$h = 0,0001$
$N = 10000$



Odhad chyby metodou polovičního kroku:

Uvažujme jednokrokovou metodu p-tého řádu.

Označme x_n^{2h} uzly pro krok $2h$ a y_n^{2h} řešení touto metodou s krokem $2h$.

Označme x_n^{h} uzly pro krok h a y_n^{h} řešení touto metodou s krokem h.

Platí

$$e_{2n}(h) = y_{2n}^{h} - y^{*}\left(x_{2n}^{h}\right) \approx \frac{y_n^{2h} - y_{2n}^{h}}{2^p - 1}.$$

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -y \cos x$, $x \in [0; 0,6]$, $y(0) = 2$, Eulerovou metodou s krokem $h = 0,1$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -y\cos x$, $x \in [0; 0,6]$, $y(0) = 2$, Eulerovou metodou s krokem $h = 0,1$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

Pro krok $h = 0,2$ dostaneme

$x_n^{0,2} = 0,2n,\ y_{n+1}^{0,2} = y_n^{0,2} - 0,2y_n^{0,2}\cos x_n^{0,2},\ y_0^{0,2} = 2.$

Pro krok $h = 0,1$ dostaneme

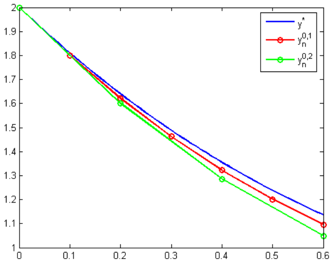
$x_n^{0,1} = 0,1n,\ y_{n+1}^{0,1} = y_n^{0,1} - 0,1y_n^{0,1}\cos x_n^{0,1},\ y_0^{0,1} = 2.$

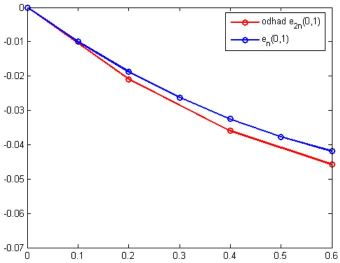
Přesné řešení dané úlohy je funkce $y^*(x) = 2e^{-\sin x}$.

Pro odhad chyby platí:

$$e_{2n}(0,1) = y_{2n}^{0,1} - y^*\left(x_{2n}^{0,1}\right) \approx \frac{y_n^{0,2} - y_{2n}^{0,1}}{2-1} = y_n^{0,2} - y_{2n}^{0,1}.$$

$h=0,1$			$h=0,2$			odhad		
n	$x_n^{0,1}$	$y_n^{0,1}$	n	$x_n^{0,2}$	$y_n^{0,2}$	$e_{2n}(0,1)$	$y^*(x_n)$	$e_{2n}(0,1)$
0	0	2,0000	0	0	2,0000	0,0000	2,0000	0,0000
1	0,1	1,8000						
2	0,2	1,6209	1	0,2	1,6000	-0,0209	1,6396	-0,0187
3	0,3	1,4620						
4	0,4	1,3224	2	0,4	1,2864	-0,0360	1,3549	-0,0325
5	0,5	1,2006						
6	0,6	1,0952	3	0,6	1,0495	-0,0457	1,1371	-0,0419


y*
y_n^{0,1}
y_n^{0,2}
2
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6


odhad e_2n(0,1)
e_n(0,1)
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
-0.06
-0.07
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

2. RUNGEOVY-KUTTOVY METODY

Přírůstková funkce má tvar

$$\Phi(x, y, h) = w_1 k_1 + w_2 k_2 + \ldots + w_s k_s,$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x, y), \\ k_i &= f\left(x + \alpha_i h, y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\right), \quad i = 2, \ldots, s. \end{aligned}$$

Konstanty $w_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ se volí tak, aby metoda byla řádu p.

Rungeova-Kuttova metoda prvního řádu je Eulerova metoda.

Rungeova-Kuttova metoda druhého řádu

Jedna z Rungeových-Kuttových metod druhého řádu nazývaná také Heunova metoda má předpis

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{aligned}$$

Tato metoda má interval absolutní stability $(-2, 0)$.

Rungeova-Kuttova metoda třetího řádu

Rungeova-Kuttova metoda třetího řádu má předpis:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}\left(k_1 + 3k_3\right), \\
k_1 &= f\left(x_n, y_n\right), \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}k_2\right).
\end{aligned}
$$

Tato metoda má interval absolutní stability $(-2,51;0)$.

Rungeova-Kuttova metoda čtvrtého řádu

Jedna z Rungeho-Kuttových metod čtvrtého řádu má předpis:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \\
k_1 &= f\left(x_n, y_n\right), \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\
k_4 &= f\left(x_n + h, y_n + hk_3\right).
\end{aligned}
$$

Interval absolutní stability je interval $(-2,78; 0)$. Tato metoda je nejpoužívanější explicitní jednokrokovou metodou.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -y \cos x$, $x \in [0; 0,6]$, $y\,(0) = 2$,.
Porovnejte řešení Eulerovou metodou, Heunovou metodou a Rungeho-Kuttovou metodu čtvrtého řádu pro krok $h = 0,1$.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -y \cos x$, $x \in [0; 0,6]$, $y(0) = 2$,. Porovnejte řešení Eulerovou metodou, Heunovou metodou a Rungeho-Kuttovou metodu čtvrtého řádu pro krok $h = 0,1$.

Heunova metoda má předpis:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{0,1}{2}(k_1 + k_2), \\
k_1 &= -y_n \cos x_n, \\
k_2 &= -(y_n + 0,1 k_1) \cos(x_n + 0,1).
\end{aligned}
$$

Rungeho-Kuttova metoda čtvrtého řádu má předpis:

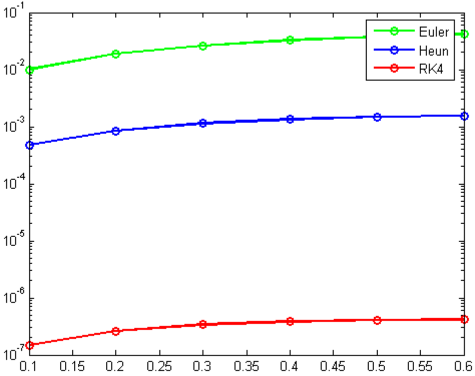
$$y_{n+1} = y_n + \frac{0,1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= -y_n \cos x_n, \\
k_2 &= -\left(y_n + \frac{0,1}{2}k_1\right)\cos\left(x_n + \frac{0,1}{2}\right), \\
k_3 &= -\left(y_n + \frac{0,1}{2}k_2\right)\cos\left(x_n + \frac{0,1}{2}\right), \\
k_4 &= -\left(y_n + 0,1k_3\right)\cos\left(x_n + 0,1\right).
\end{aligned}$$

Tabulka hodnot přibližného řešení pro jednotlivé metody

x_n	Euler	Heun	RK4
0	**2,00000000**	**2,00000000**	**2,00000000**
0,1	**1,80**000000	**1,8**1044962	**1,809976**47
0,2	**1,6**2089925	**1,6**4048880	**1,63964**213
0,3	**1,4**6204033	**1,48**941834	**1,48828**909
0,4	**1,3**2236628	**1,35**623417	**1,354901**99
0,5	**1,2**0056828	**1,23**974634	**1,23827**833
0,6	**1**,09520850	**1,13**867676	**1,13712**718

Graf chyby


Euler
Heun
RK4
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6

PŘÍKLAD: Řešte soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1, \\ y_2' &= -999y_1 - 1000y_2, \end{aligned}$$

s podmínkami

$$y_1(0) = 2, y_2(0) = 1.$$

Budeme danou soustavu řešit Eulerovou metodou. Není zadán interval, budeme proto počítat přibližné řešení, dokud se toto řešení bude významně měnit, tj. dokud se řešení neustálí.

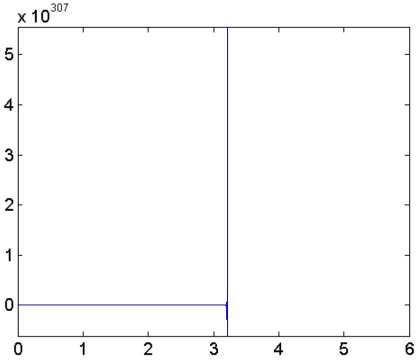
Eulerova metoda pro řešení dané soustavy má předpis

$$
\begin{aligned}
y^1_{n+1} &= y^1_n + h\left(-y^1_n\right), \\
y^2_{n+1} &= y^2_n + h\left(-999y^1_n - 1000y^2_n\right),
\end{aligned}
$$

kde $y^1_0 = 2,\ y^2_0 = 1.$

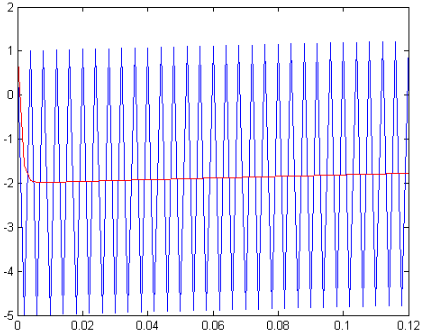
Zvolme nejprve krok $h = 0,01$. Hodnoty přibližného řešení u složky y_n^2 výrazně narůstají, po několika krocích je hodnota větší než maximální číslo typu double. Metoda je pro danou soustavu a zvolený krok nestabilní.

Graf přibližného řešení y_n^2



Zvolme krok $h = 0,002$. Přibližné řešení y_n^2 osciluje. Metoda je pro danou soustavu a zvolený krok nestabilní.

Graf přibližného řešení y_n^2

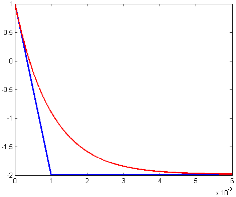


Pro volbu kroku $h = 0,001$ je již výpočet stabilní.

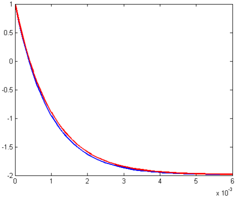
Budeme počítat přibližné řešení, dokud se toto řešení bude významně měnit, tj. na intervalu $[0, 5]$. Počet kroků označíme N, platí $5 = hN$.

Graf přibližného řešení y_n^2 a přesného řešení y_2

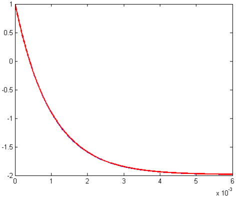
$h = 0,001$
$N = 5000$



$h = 0,0001$
$N = 50000$

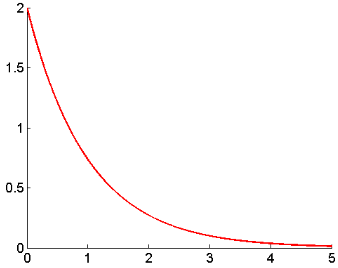


$h = 0,00001$
$N = 500000$

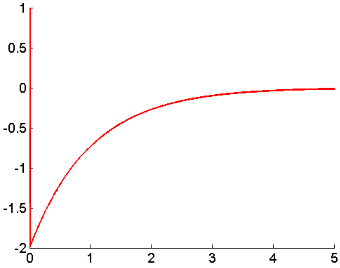


Přesné řešení soustavy je $y_1(x) = 2e^{-x}$, $y_2(x) = -2e^{-x} + 3e^{-1000x}$. Funkce y_2 je součtem násobku velmi rychle klesající funkce e^{-1000x} a násobku pomaleji klesající funkce e^{-x}. Abychom zachytili pokles první funkce, musíme zvolit velmi malý krok. Daná soustava patří mezi soustavy se silným tlumením.

Graf y_1



Graf y_2



Soustavy se silným tlumením

Řešení rovnice nebo soustavy rovnic se někdy skládá z několika složek, z nichž jedna klesá velmi rychle a jiná poměrně pomalu. Takové soustavy se nazývají soustavy se silným tlumením (stiff systems).

Rychle klesající složka omezuje velikost kroku, pro dosažení stability a požadované přesnosti je nutné volit velmi malý krok. Většinou počítáme přibližné řešení, dokud se toto řešení neustálí. Pomalu klesající složka potom určuje délku intervalu, na kterém počítáme řešení. Je tedy nutné počítat s velmi malým krokem na relativně dlouhém intervalu a výpočet přibližného řešení pomocí dosud uvedených metod vyžaduje extrémní množství kroků.

Dosud uvedené explicitní jednokrokové metody proto nejsou vhodné k řešení takových soustav. K jejich řešení se používají spíše implicitní metody nebo metody typu prediktor-korektor, které jsou kombinací explicitních a implicitních metod.

ŘEŠENÍ ODR

Příklad: Určete řešení rovnice $y' = -xy$ na $(0,2)$, $y(0) = 5$.

1. symbolický výpočet

řešení v Matlabu 2011:

$$dsolve('Dy = -x*y','y(0) = 5','x')$$

řešení v Matlabu 2015:

$$syms \quad y(x)$$

$$dsolve(diff(y,x) == -x*y, y(0) == 5)$$

Příklad: Určete řešení rovnice $y' = -xy$ na $(0, 2)$, $y(0) = 5$.

2. numerický výpočet

$[x, y] = ode45(@(x, y) - x. * y, [0, 2], 5)$ - řešení Rungeho-Kuttovou metodou čtvrtého řádu

$ode45(@(x, y) - x. * y, [0, 2], 5)$ - výstupem bude graf

$options = odeset('RelTol', 10\hat{}(-7))$ - nastavení relativní tolerance

$[x, y] = ode45(@(x, y) - x. * y, [0, 2], 5, options)$

Další řešiče: ode23 (RK2), ode23tb (RK2 implicitní),
ode15s (Gear)

ŘEŠENÍ SOUSTAV ODR

Příklad: Určete řešení soustavy $y' = -y + z$, $z' = y - z$, $y(0) = 2$, $z(0) = 0$.

1. symbolický výpočet

řešení v Matlabu 2011:

$$[y, z] = dsolve('Dy = -y + z',' Dz = y - z',' y(0) = 2',' z(0) = 0',' x')$$

řešení v Matlabu 2015:

$$syms \quad y(x) \quad z(x)$$

$$[y,z]=dsolve(diff(y,x)==-y+z,diff(z,x)==y-z,y(0)==2,z(0)==0)$$

Příklad: Určete řešení soustavy $y' = -y + z$, $z' = y - z$, $y(0) = 2$, $z(0) = 0$.

2. numerický výpočet

Vytvoříme funkci

```
function f=funkce2(x,y)
f=zeros(2,1);
f(1)=-y(1)+y(2);
f(2)=y(1)-y(2);
end
```

a použijeme příkaz

$[x, y] = ode45('funkce2', [0, 1], [2; 0])$

SFÉRICKÉ KYVADLO

Poloha hmotného bodu je určena funkcí $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Hmotný bod má hmotnost m, působí na něj gravitační síla $F = (0, 0, -gm)$, kde $g = 9{,}8\ ms^{-2}$, a pohybuje se po sférické ploše, která má rovnici $\Phi(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$. Pohyb je popsán rovnicemi:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{F} - \frac{m\,\dot{\mathbf{x}}^T\ H\,\dot{\mathbf{x}} + \nabla\Phi^T\mathbf{F}}{|\nabla\Phi|^2}\ \nabla\Phi\right) \quad \text{pro } t > 0.$$

Matice H je Hessova matice funkce Φ, která má prvky $H_{ij} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}$ pro $i, j = 1, 2, 3$. Dále jsou dány počáteční podmínky:

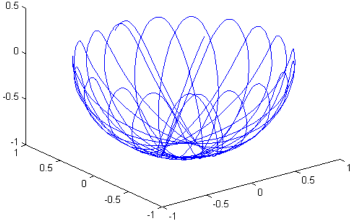
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = (0; 1; 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0 = (\ 0{,}8; 0;\ 1{,}2).$$

ŘEŠENÍ V MATLABU

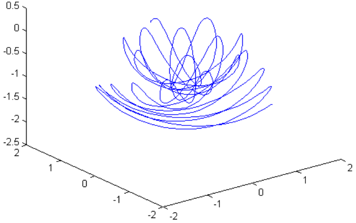
Máme zadánu soustavu tří rovnic druhého řádu, převedeme je na soustavu šesti rovnic prvního řádu. Tuto soustavu budeme řešit Rungeho-Kuttovou metodou pomocí vestavěných řešičů *ode23* (metoda RK2) a *ode45* (metoda RK4). Výchozí relativní tolerance je 0,001.

ŘEŠENÍ V MATLABU

Máme zadánu soustavu tří rovnic druhého řádu, převedeme je na soustavu šesti rovnic prvního řádu. Tuto soustavu budeme řešit Rungeho-Kuttovou metodou pomocí vestavěných řešičů *ode23* (metoda RK2) a *ode45* (metoda RK4). Výchozí relativní tolerance je 0,001.



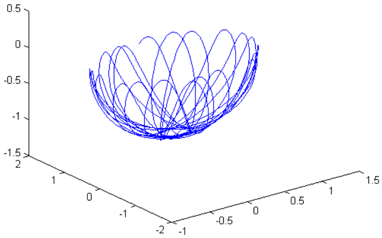
ode23



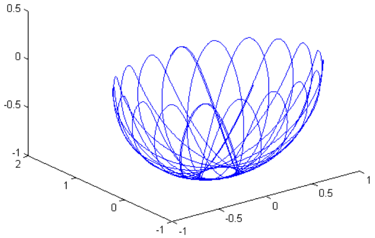
ode45

ŘEŠENÍ V OCTAVE

Použijeme stejné řešiče a stejnou relativní toleranci 0,001.



ode23



ode45