MATEMATIKA 2

Řešené příklady

Dana Černá

Katedra matematiky

Technická univerzita v Liberci

https://kma.fp.tul.cz

2025

Nevlastní integrál

Příklad 1. Vypočtěte

$$\int_0^\infty e^{3-2x} dx.$$

Řešení: Platí

$$\int_0^\infty e^{3-2x} dx = \left[\frac{e^{3-2x}}{-2}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3-2x}}{-2} + \frac{e^3}{2} = 0 + \frac{e^3}{2} = \frac{e^3}{2}.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+9}\, dx.$$

Řešení: Nejprve provedeme úpravu:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+9}\, dx = \frac{1}{9}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\frac{x^2}{9}+1}\, dx.$$

Nyní použijeme substituci $y = x/3$. Pro tuto substituci je $dy = dx/3$ a tedy $dy = 3dx$. Dále platí, že $y = -\infty$ pro $x = -\infty$ a $y = \infty$ pro $x = \infty$, z čehož plyne, že se meze integrálu po substituci nezmění. Dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+9}\, dx &= \frac{1}{9}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\frac{x^2}{9}+1}\, dx = \frac{1}{9}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+1} 3\, dy = \frac{1}{3}\Big[\operatorname{arctg} y\Big]_{-\infty}^\infty \\ &= \frac{1}{3}\left(\lim_{y\to\infty} \operatorname{arctg} y - \lim_{y\to-\infty} \operatorname{arctg} y\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx.$$

Řešení: Jedná se o nevlastní integrál, protože integrovaná funkce není definována v bodě 2. K řešení použijeme substituci $y = 2 - x$. V tomto případě je $dy = -dx$ a tedy $dx = -dy$. Určíme nové meze: $y = 2$ pro $x = 0$ a $y = 0$ pro $x = 2$. Dostaneme:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx = \int_2^0 \frac{1}{\sqrt{y}}\, (-1)\, dy = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^2 = 2\sqrt{2} - 0 = 2\sqrt{2}.$$

Příklad 4. Vypočtěte
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx.$$

Řešení: Použijeme rozklad na parciální zlomky:
$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx}{x^2+x}.$$

Čitatele zlomků na levé a pravé straně jsou si rovny, tedy
$$1 = Ax + A + Bx.$$

Nyní určíme konstanty A a B porovnáním koeficientů u x a konstantních koeficientů. Dostaneme soustavu:
$$\begin{aligned} x: &\quad A+B=0,\\ 1: &\quad A=1. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že $A=1$ a $B=-A=-1$. Pro daný integrál tedy platí:
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\ln|x| - \ln|x+1|\Big]_0^1 \\ &= \ln 1 - \ln 2 - \lim_{x\to 0+} \ln|x| + \ln 1 = -\ln 2 - (-\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Příklad 5. Vypočtěte
$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx.$$

Řešení: Vzhledem k tomu, že integrovaná funkce není definována v bodě 1, je nutné zadaný integrál rozdělit na dvě části:
$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx.$$

K výpočtu integrálů na pravé straně použijeme substituci $y = x-1$ a dostaneme
$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{y^2}\,dy + \int_0^2 \frac{1}{y^2}\,dy \\ &= \left[-\frac{1}{y}\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{y}\right]_0^2 = -\lim_{y\to 0-} \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{2} + \lim_{y\to 0+} \frac{1}{y} \\ &= -(-\infty) + \frac{1}{2} + \infty = \infty. \end{aligned}$$

Číselné řady

Příklad 1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Řešení: Jedná se o řadu s kladnými členy, protože $a_n = n/3^n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. K vyšetření konvergence použijeme limitní podílové kritérium. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{3}.$$

Vzhledem k tomu, že je výsledná limita menší než 1, zadaná řada konverguje. Jedná se o řadu s kladnými členy, takže konverguje také řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n}{3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Zadaná řada tedy konverguje absolutně.

Příklad 2. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.

Řešení: Jedná se o řadu, jejíž členy $a_n = (n+1)/n!$ jsou kladné, a proto můžeme k vyšetření konvergence použít limitní podílové kritérium. Vypočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že je výsledná limita menší než 1, zadaná řada konverguje. Jedná se o řadu s kladnými členy, konverguje tedy absolutně.

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2+1}$.

Řešení: Jedná se o řadu s kladnými členy $a_n = 4^n/\left(n^2+1\right)$. K vyšetření konvergence opět použijeme limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\frac{4^n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} = 4.$$

Vzhledem k tomu, že je hodnota této limity větší než 1, zadaná řada diverguje.

Příklad 4. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Řešení: K vyšetření konvergence použijeme integrální kritérium. Funkce f určující n-tý člen je dána předpisem

$$f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Funkce f je kladná, spojitá a nerostoucí na intervalu $[1, \infty)$ a platí

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\, dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^\infty = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < \infty.$$

Vzhledem k tomu, že je tento integrál konečný, zadaná řada konverguje. Jedná se o řadu s kladnými členy, konverguje tedy absolutně.

Příklad 5. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Řešení: K vyšetření konvergence opět použijeme integrální kritérium. Funkce f určující n-tý člen je dána předpisem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Funkce f je kladná, spojitá a nerostoucí na intervalu $[1, \infty)$ a platí

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int_1^\infty x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \left[\frac{3x^{2/3}}{2} \right]_1^\infty = \infty - \frac{3}{2} = \infty.$$

Vzhledem k tomu, že tento integrál není konečný, zadaná řada diverguje.

Příklad 6. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Řešení: Jedná se o alternující řadu, proto k vyšetření její konvergence použijeme Leibnizovo kritérium. Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

což dle Leibnizova kritéria znamená, že zadaná řada konverguje. Dále vyšetříme absolutní konvergenci, tj. konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Funkce daná předpisem $f(x) = 1/x$ je kladná, spojitá a nerostoucí na intervalu $[1, \infty)$, takže můžeme použít integrální kritérium. Platí

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \big[\ln x \big]_1^\infty = \infty - 0 = \infty.$$

Vzhledem k tomu, že tento integrál není konečný, řada (1) diverguje, z čehož plyne, že zadaná řada nekonverguje absolutně. Zadaná řada tedy konverguje relativně.

Příklad 7. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$.

Řešení: Nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pro zadanou řadu platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

Nutná podmínka konvergence tedy není splněna, což znamená, že je zadaná řada divergentní.

Příklad 8. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$.

Řešení: Jedná se o řadu s kladnými členy, a proto můžeme k vyšetření její konvergence použít limitní odmocninové kritérium. Potřebujeme tedy určit limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

kde $a_n = 1/(n+1)^n$. Pro tuto limitu platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že je výsledná limita menší než 1, řada konverguje. Jelikož se jedná o řadu s kladnými členy, můžeme učinit závěr, že zadaná řada konverguje absolutně.

Příklad 9. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$.

Řešení: Členy zadané řady $a_n = 1/(2^n+1)$ jsou kladné, a proto můžeme k vyšetření konvergence použít limitní podílové kritérium. Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}+1}}{\frac{1}{2^n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že je výsledná limita menší než 1, řada konverguje. Jedná se o řadu s kladnými členy, konverguje tedy absolutně.

Příklad 10. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Řešení: Budeme nejprve vyšetřovat absolutní konvergenci, tj. konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|. \tag{2}$$

K t;omu použijeme srovnávací kritérium. Vzhledem k tomu, že

$$0 \le \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2},$$

je řada (2) shora omezena řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{3}$$

Pro vyšetření této řady použijeme integrální kritérium. Protože je funkce daná předpisem $f(x) = 1/x^2$ kladná, spojitá a nerostoucí na intervalu $[1, \infty)$ a platí

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 0 + 1 = 1 < \infty,$$

je řada (3) je konvergentní. Z toho vyplývá, že zadaná řada konverguje absolutně.

Příklad 11. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n}$.

Řešení: Použijeme srovnávací kritérium. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \le \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n} \le \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^n} = \frac{\pi}{2^{n+1}},$$

z čehož vyplývá, že je zadaná řada shora omezena řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{4}$$

Pro zjištění konvergence řady na pravé straně, jejíž členy $a_n = 1/2^{n+1}$ jsou kladné, použijeme limitní podílové kritérium. Vypočítáme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Výsledná limita je menší než 1, takže řada (4) konverguje. Zadaná řada tedy také konverguje a vzhledem k tomu, že má kladné členy, konverguje absolutně.

Vektorové prostory

Příklad 1. Rozhodněte, zda je vektor $u = (1, 5, 3)$ lineární kombinací vektorů $v = (1, 2, 3)$ a $w = (1, 1, 1)$.

Řešení:

Zkusíme najít reálné koeficienty c_1 a c_2, pro které platí

$$u = c_1 v + c_2 w, \tag{5}$$

tedy

$$(1, 5, 3) = c_1 (1, 2, 3) + c_2 (1, 1, 1) . \tag{6}$$

Tento vztah rozepíšeme po složkách a dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2, \\ 5 &= 2 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2, \\ 3 &= 3 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2. \end{aligned} \tag{7}$$

K řešení můžeme použít Gaussovu eliminaci:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right). \tag{8}$$

V první matici je v prvním sloupci umístěn vektor v, ve druhém sloupci je vektor w a na pravé straně je vektor u. Vzhledem k tomu, že poslední rovnice po eliminaci $0 = -6$ nemá řešení, nemá ani soustava (7) řešení. Koeficienty c_1 a c_2 splňující (5) tedy neexistují a proto vektor u není lineární kombinací vektorů v a w.

Příklad 2. Rozhodněte, zda jsou vektory $u = (1, 4)$ a $v = (2, 5)$ lineárně nezávislé.

Řešení: Zjistíme, pro jaké koeficienty je lineární kombinace vektorů u a v nulová. Hledáme tedy reálné koeficienty c_1 a c_2, pro které platí

$$c_1 u + c_2 v = c_1 (1, 4) + c_2 (2, 5) = (0, 0) . \tag{9}$$

Rozepíšeme tento vztah po složkách a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 &= 0, \\ 4 \cdot c_1 + 5 \cdot c_2 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Tuto soustavu zapíšeme v maticovém tvaru, přičemž v prvním sloupci matice soustavy je vektor u a ve druhém sloupci matice soustavy je vektor v. K řešení soustavy použijeme Gaussovu eliminaci a dostaneme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right). \tag{11}$$

Z toho plyne, že soustava má pouze triviální řešení $c_1 = c_2 = 0$ a dle definice jsou tedy vektory u a v lineárně nezávislé.

Příklad 3. Rozhodněte, zda vektory $u = (1, 8, 5)$ a $v = (4, 1, 8)$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Vektory u a v netvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, protože jsou pouze dva a báze prostoru $\mathbb{R}^3$ musí obsahovat právě tři prvky.

Příklad 4. Určete, pro jaké hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tvoří vektory $u_1 = (1, 0, \alpha)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ a $u_3 = (\alpha, 1, 0)$ bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Platí, že vektory $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když determinant matice, jejíž sloupce jsou vektory u_1, u_2 a u_3, je nenulový. Vypočteme tedy determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2\alpha + 0 - \alpha^2 - 0 - 0 = \alpha\,(2 - \alpha)\,.$$

Tento determinant je nulový, pokud $\alpha = 0$ nebo $\alpha = 2$. To znamená, že zadané vektory tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Příklad 5. Ověřte, že množina $B = \{(2, 0, 1), (3, 0, 0), (0, 2, 4)\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}^3$ a určete souřadnice vektoru $v = (7, -4, 0)$ v této bázi.

Řešení: Zadané vektory tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když determinant matice, jejíž sloupce jsou tyto vektory, je nenulový. Nejprve tedy vypočítáme determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6 - 0 - 0 - 0 = 6.$$

Determinant je nenulový, z čehož plyne, že množina B je báze prostoru $\mathbb{R}^3$. Určíme souřadnice vektoru $v = (7, -4, 0)$ v této bázi, tj. konstanty c_1, c_2 a c_3, pro které platí

$$v = (7, -4, 0) = c_1\,(2, 0, 1) + c_2\,(3, 0, 0) + c_3\,(0, 2, 4)\,.$$

Rozepíšeme-li tento vztah po složkách, dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} 2c_1 + 3c_2 &= 7, \\ 2c_3 &= -4, \\ c_1 + 4c_3 &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení $c_1 = 8$, $c_2 = -3$ a $c_3 = -2$. Vektor v má tedy v bázi B souřadnice $\langle v \rangle_B = (8, -3, -2)$.

Příklad 6. Rozhodněte, zda je polynom $S(x) = 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$ lineární kombinací polynomů $P(x) = x^2 + 1$, $Q(x) = x^3 + 1$ a $R(x) = x^3 - x + 2$.

Řešení: Budeme hledat koeficienty c_1, c_2 a c_3, které splňují

$$S(x) = c_1\, P(x) + c_2\, Q(x) + c_3\, R(x)\,.$$

Dosadíme předpisy zadaných polynomů do této rovnice a dostaneme

$$3x^3 + 5x^2 + 3x + 5 = c_1\left(x^2+1\right) + c_2\left(x^3+1\right) + c_3\left(x^3 - x + 2\right).$$

Porovnáme koeficienty u x^3, x^2, x a konstantní koeficienty a dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} x^3 :&\quad 3 = c_2 + c_3 \\ x^2 :&\quad 5 = c_1 \\ x :&\quad 3 = -c_3 \\ 1 :&\quad 5 = c_1 + c_2 + 2c_3 \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení $c_1 = 5$, $c_2 = 6$ and $c_3 = -3$. Z toho plyne, že polynom S je lineární kombinací polynomů P, Q a R s těmito koeficienty, tj. platí

$$S(x) = 5\,P(x) + 6\,Q(x) - 3\,R(x)\,.$$

Příklad 7. Rozhodněte, zda vektory $u_1 = (1,0,2,0)$, $u_2 = (2,1,0,0)$, $u_3 = (0,2,0,0)$ a $u_4 = (1,3,0,2)$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešení: Zadané čtyři vektory tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ právě tehdy, když determinant matice, jejíž sloupce jsou tyto vektory, je nenulový. Vypočítáme tedy tento determinant a to pomocí rozvoje podle třetího řádku:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\,(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\,(8+0+0-0-0-0) = 16.$$

Determinant vyšel nenulový a můžeme tedy učinit závěr, že zadané vektory tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

Příklad 8. Určete, pro jaké hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ má soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení, jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Soustava má právě jedno řešení právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$. Nejprve tedy spočítáme determinant matice $\mathbf{A}$:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - \alpha^2 = (2-\alpha)\,(2+\alpha)\,.$$

Hodnota tohoto determinantu je nulová právě tehdy, když $\alpha = 2$ nebo $\alpha = -2$. Z toho vyplývá, že soustava má jednoznačné řešení pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Příklad 1. Určete vlastní čísla, vlastní vektory, spektrum a spektrální poloměr matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Budeme řešit charakteristickou rovnici $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$. Nejprve vyjádříme matici $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro determinant této matice platí:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (3-\lambda) - (3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = (3-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) = (3-\lambda)\,\lambda\,(\lambda-2)\,. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, pokud $\lambda = 3$, $\lambda = 2$ nebo $\lambda = 0$. Matice $\mathbf{A}$ má tedy vlastní čísla $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ nebo $\lambda_3 = 0$, spektrum je množina $\{0, 2, 3\}$ a spektrální poloměr je 3.

Nyní vypočítáme vlastní vektory příslušné těmto vlastním číslům. Podle definice je vlastní vektor nenulový vektor splňující rovnici $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro první vlastní číslo $\lambda_1 = 3$ dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tuto soustavu vyřešíme pomocí Gaussovy eliminace:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Vlastní vektor nemůže být nulový, proto dále uvažujeme pouze $c \neq 0$. Vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$ je tedy vektor

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Pro další vlastní číslo $\lambda_2 = 2$ dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = c$, $x_2 = c$, $x_3 = 0$ pro $c \in \mathbb{R}$. Vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2$ je tedy vektor

$$\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pro poslední vlastní číslo $\lambda_3 = 0$ dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = c$, $x_2 = -c$, $x_3 = 0$, přičenž $c \in \mathbb{R}$. Vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_3 = 0$ je tedy vektor

$$\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Příklad 2. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve vypočítáme

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 4 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda) + 12 + 12 - 12(1-\lambda) - 2(6-\lambda) - 6(2-\lambda) \\ &= \lambda^2 (9-\lambda). \end{aligned}$$

Tento determinant je roven nule, pokud $\lambda = 9$ nebo $\lambda = 0$. Z toho plyne, že matice $\mathbf{A}$ má vlastní číslo $\lambda_1 = 9$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 0$.

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 9$ dostaneme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 2 & -7 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tuto soustavu vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = c$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 3c$ pro $c \in \mathbb{R}$. Vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_1 = 9$ je tedy vektor

$$\mathbf{x}^1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vlastní vektory příslušné dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$ dostaneme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení tvaru $x_1 = -c_1 - 2c_2$, $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$ pro $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$ je tedy libovolný vektor tvaru

$$\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad [c_1, c_2] \neq [0, 0].$$

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$ násobnosti dva tedy přísluší dva lineárně nezávislé vlastní vektory:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a všechny ostatní vlastní vektory příslušející tomuto vlastnímu číslu jsou jejich lineární kombinací.

Příklad 3. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve vypočítáme

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5).$$

Tento determinant je nulový pro $\lambda = 0$ a $\lambda = 5$. Z toho plyne, že matice $\mathbf{A}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 5$.

Nyní vypočítáme vlastní vektory příslušné těmto vlastním číslům. Podle definice je vlastní vektor příslušný λ nenulový vektor splňující rovnici $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro první vlastní číslo $\lambda_1 = 0$ dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má řešení $x_1 = -3c$, $x_2 = 2c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ je tedy vektor

$$\mathbf{x}^1 = c \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pro další vlastní číslo $\lambda_1 = 5$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má řešení $x_1 = c$, $x_2 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ je tedy vektor

$$\mathbf{x}^1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Definiční obory funkcí více proměnných

Příklad 1. Určete definiční obor funkce f dané předpisem

$$f(x,y) = \ln(y-x) + \frac{\cos(x+y)}{x^2+y^2+1} + \arcsin\frac{x^2+y^2-5}{4}.$$

Řešení: V předpisu funkce f se vyskytuje několik omezujících podmínek:

a) Funkce logaritmus je definována pouze pro kladná čísla, takže musí platit $y-x>0$, tj. $y>x$. Do definičního oboru funkce f tedy patří takové body $[x,y]$, které leží nad přímkou $y=x$. Vzhledem k ostré nerovnosti ve vztahu $y>x$, přímka $y=x$ do definičního oboru nepatří a znázorníme ji proto čárkovaně.

b) Výraz x^2+y^2+1 musí být různý od nuly, protože je ve jmenovateli zlomku. To je splněno pro všechna $[x,y]\in\mathbb{R}^2$, protože je zřejmé, že x^2+y^2+1 je kladné pro libovolné $[x,y]\in\mathbb{R}^2$.

c) Funkce arkus sinus je definována na intervalu $[-1,1]$. Musí tedy platit

$$-1 \le \frac{x^2+y^2-5}{4} \le 1.$$

Po úpravě dostaneme

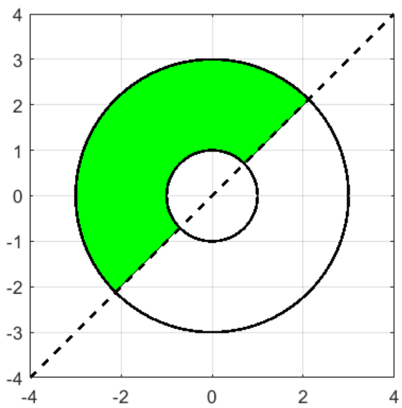
$$-4 \le x^2+y^2-5 \le 4$$

a tedy

$$1 \le x^2+y^2 \le 9.$$

První nerovnice $1 \le x^2+y^2$ určuje vnějšek kružnice o poloměru jedna a druhá nerovnice $x^2+y^2 \le 9$ určuje vnitřek kružnice o poloměru tři.

Z toho tedy plyne, že hledaný definiční obor tvoří část mezikruží určeného kružnicemi o poloměru 1 a 3, která leží nad přímkou $y=x$, jak je znázorněno na obrázku 1.



Obrázek 1. Definiční obor funkce f z příkladu 1.

Příklad 2. Určete definiční obor funkce f dané předpisem

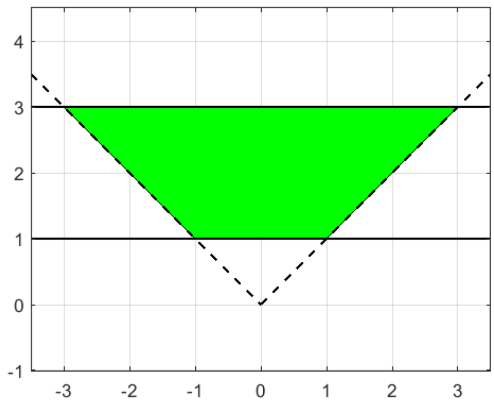
$$f(x,y) = \frac{\arccos(y-2)}{3} + \ln(y - |x|) + \sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Řešení: V předpisu funkce f se vyskytuje několik omezujících podmínek:

a) Funkce arkus kosinus je definována na intervalu $[-1, 1]$. Z toho plyne, že musí platit $-1 \leq y - 2 \leq 1$, tedy $1 \leq y \leq 3$. První nerovnice $1 \leq y$ určuje polorovinu ležící nad přímkou $y = 1$, druhá nerovnice $y \leq 3$ určuje polorovinu ležící pod přímkou $y = 3$. Definiční obor funkce f tedy leží v pásu mezi přímkami $y = 1$ a $y = 3$. Vzhledem k tomu, že nerovnosti jsou neostré, tyto přímky také patří do pásu.

b) Funkce logaritmus je definována pouze pro kladná čísla, takže musí platit $y - |x| > 0$, tj. $y > |x|$. Do definičního oboru funkce f tedy patří takové body $[x, y]$, které leží nad grafem funkce absolutní hodnota x. Vzhledem k ostré nerovnosti, graf funkce $|x|$ do definičního oboru nepatří a znázorníme ho proto čárkovaně.

Definiční obor funkce f je průnikem výše uvedených množin, jak je znázorněno na obrázku 2.



Obrázek 2. Definiční obor funkce f z příkladu 2.

Příklad 3. Určete definiční obor funkce f dané předpisem

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Řešení: Odmocnina je definována pouze pro nezáporná čísla. Z toho plyne, že musí být splněny čtyři podmínky:

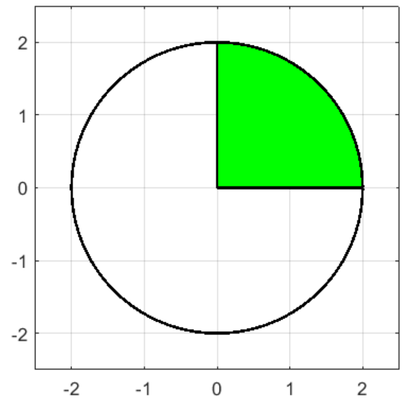
a) První podmínka je $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, tedy $4 \geq x^2 + y^2$. Tato podmínka určuje vnitřek kružnice se středem v počátku a poloměrem 2.

b) Druhá podmínka $x \geq 0$ určuje polorovinu vpravo od osy y, protože osa y je totožná s přímkou $x = 0$.

c) Třetí podmínka $y \geq 0$ určuje polorovinu nad osou x, protože přímka $y = 0$ je totožná s osou x.

b) Poslední podmínka $x^2 + y^2 \geq 0$ je splněna pro všechny body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$.

Definiční obor funkce f je průnikem těchto množin, jak je znázorněno na obrázku 3. Díky tomu, že všechny nerovnosti byly neostré, hranice do definičního oboru také patří.



Obrázek 3. Definiční obor funkce f z příkladu 3.

Limity funkcí více proměnných

Příklad 1. Vypočtěte
$$\lim_{[x,y]\to[1,0]} \frac{x^2y - x^2 - xy + x}{x-1}.$$

Řešení: Jedná se o limitu typu 0/0. Tuto limitu vypočítáme tak, že upravíme předpis zadané funkce. Dostaneme:
$$\begin{aligned}\lim_{[x,y]\to[1,0]} \frac{x^2y - x^2 - xy + x}{x-1} &= \lim_{[x,y]\to[1,0]} \frac{x^2(y-1) - x(y-1)}{x-1} \\ &= \lim_{[x,y]\to[1,0]} \frac{(x^2-x)(y-1)}{x-1} = \lim_{[x,y]\to[1,0]} \frac{x(x-1)(y-1)}{x-1} \\ &= \lim_{[x,y]\to[1,0]} x(y-1) = 1(0-1) = -1.\end{aligned}$$

Příklad 2. Vypočtěte
$$\lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{2x+3y-5}{x-y}.$$

Řešení: Jedná se opět o limitu typu 0/0. Ověříme nutnou podmínku existenci limity, tj. podmínku
$$\lim_{\substack{x\to1\\y=1}} \frac{2x+3y-5}{x-y} = \lim_{\substack{x=1\\y\to1}} \frac{2x+3y-5}{x-y}.$$
Nejprve vypočteme
$$\lim_{\substack{x\to1\\y=1}} \frac{2x+3y-5}{x-y} = \lim_{x\to1} \frac{2x+3-5}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2.$$
Pro druhou limitu platí
$$\lim_{\substack{x=1\\y\to1}} \frac{2x+3y-5}{x-y} = \lim_{y\to1} \frac{2+3y-5}{1-y} = \lim_{y\to1} \frac{3y-3}{1-y} = \lim_{y\to1} \frac{-3(1-y)}{1-y} = -3.$$
Vzhledem k tomu, že se vypočtené limity nerovnají, tedy $2 \neq -3$, není splněna nutná podmínka existence limity a zadaná limita tedy neexistuje.

Příklad 3. Vypočtěte
$$\lim_{[x,y]\to[1,3]} \frac{x+y-2}{y^2-6y+9}.$$

Řešení: Jedná se o limitu typu 2/0. Použijeme větu o limitě operací:
$$\lim_{[x,y]\to[1,3]} \frac{x+y-2}{y^2-6y+9} = \lim_{[x,y]\to[1,3]} (x+y-2) \cdot \lim_{[x,y]\to[1,3]} \frac{1}{y^2-6y+9} = 2 \lim_{y\to3} \frac{1}{(y-3)^2}.$$

Nyní máme na pravé straně limitu funkce jedné proměnné $1/(y-3)^2$, která je typu $1/0$ a jmenovatel je na prstencovém okolí bodu 3 kladný, z čehož plyne, že tato limita je ∞. Pro zadanou limitu tedy platí

$$\lim_{[x,y]\to[1,3]} \frac{x+y-2}{y^2-6y+9} = 2\lim_{y\to 3} \frac{1}{(y-3)^2} = 2\cdot\infty = \infty.$$

Příklad 4. Vypočtěte

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2-\sqrt{x^2+y^2+4}}{x^2+y^2}.$$

Řešení: Jedná se o limitu typu $0/0$. Tuto limitu určíme tak, že upravíme předpis zadané funkce:

$$\begin{aligned}
\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2-\sqrt{x^2+y^2+4}}{x^2+y^2} &= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\left(2-\sqrt{x^2+y^2+4}\right)\left(2+\sqrt{x^2+y^2+4}\right)}{(x^2+y^2)\left(2+\sqrt{x^2+y^2+4}\right)} \\
&= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{4-x^2-y^2-4}{(x^2+y^2)\left(2+\sqrt{x^2+y^2+4}\right)} \\
&= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\left(2+\sqrt{x^2+y^2+4}\right)} \\
&= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{-1}{2+\sqrt{x^2+y^2+4}} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Parciální derivace a jejich aplikace

Příklad 1. Funkce f je dána předpisem

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(2x+3y) + \sqrt{x^4+y^4}.$$

Určete gradient funkce f v bodě $A = [3,0]$, derivaci funkce f v bodě A ve směru vektoru $u = (1,5)$ a rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[A, f(A)]$.

Řešení: Nejprve určíme parciální derivace

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2}{1+(2x+3y)^2} + \frac{1}{2}\frac{4x^3}{\sqrt{x^4+y^4}} \\
&= \frac{2}{1+(2x+3y)^2} + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{3}{1+(2x+3y)^2} + \frac{1}{2}\frac{4y^3}{\sqrt{x^4+y^4}} \\
&= \frac{3}{1+(2x+3y)^2} + \frac{2y^3}{\sqrt{x^4+y^4}}
\end{aligned}$$

a jejich hodnoty v bodě $A = [3,0]$, tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,0) = \frac{2}{1+36} + \frac{2\cdot 27}{\sqrt{81}} = \frac{224}{37}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(3,0) = \frac{3}{1+36} + \frac{2\cdot 0}{\sqrt{81}} = \frac{3}{37}.$$

Z toho plyne, že gradient funkce f nabývá v bodě A hodnoty

$$\nabla f(A) = \left(\frac{224}{37}, \frac{3}{37}\right).$$

Zadaný vektor $u = (1,5)$ vydělíme jeho normou $\|u\| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ a dostaneme tak vektor

$$\frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}}\right).$$

Pro derivaci funkce f v bodě A ve směru $u = (u_1, u_2)$ potom platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(A)\frac{u_1}{\|u\|} + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\frac{u_2}{\|u\|} \\
&= \frac{224}{37}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{3}{37}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{239}{37\sqrt{26}}.
\end{aligned}$$

Tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[A, f(A)]$ pro obecný bod $A = [x_0, y_0]$ je dána rovnicí

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(x-y_0).$$

Z toho plyne, že tečná rovina ke grafu zadané funkce f v bodě $A = [3,0]$ má rovnici

$$z - \operatorname{arctg}(6) - 9 = \frac{224}{37}(x-3) + \frac{3}{37}y,$$

tedy po úpravě:

$$z = \frac{224x}{37} + \frac{3y}{37} + \operatorname{arctg}(6) - \frac{339}{37}.$$

Taylorův polynom

Příklad 1. Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě $A = [0, 1]$ funkce f dané předpisem

$$f(x, y) = e^{2x-y+1} + \sqrt{2y+7}.$$

Řešení: Určíme všechny parciální derivace až do druhého řádu. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2e^{2x-y+1} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -e^{2x-y+1} + \frac{1}{\sqrt{2y+7}}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 4e^{2x-y+1} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -2e^{2x-y+1} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= e^{2x-y+1} - \frac{1}{(2y+7)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Dále určíme hodnoty funkce f a těchto derivací v bodě A, tedy

$$\begin{aligned}
f(0, 1) &= 4, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -\frac{2}{3}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) &= 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 1) = \frac{26}{27}.
\end{aligned}$$

Taylorův polynom druhého řádu funkce f se středem $A = [x_0, y_0]$ určíme ze vztahu

$$\begin{aligned}
T(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2.
\end{aligned}$$

Dostaneme

$$T(x, y) = 4 + 2x - \frac{2}{3}(y - 1) + 2x^2 - 2x(y - 1) + \frac{13}{27}(y - 1)^2.$$

Příklad 2. Určete Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě $A = [1, 0]$ funkce f dané předpisem

$$f(x, y) = \sin(3x - 2y - 3).$$

Řešení: Určíme všechny parciální derivace až do třetího řádu. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3\cos(3x-2y-3),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2\cos(3x-2y-3),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -9\sin(3x-2y-3),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= 6\sin(3x-2y-3),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -4\sin(3x-2y-3),\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) &= -27\cos(3x-2y-3),\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) &= 18\cos(3x-2y-3),\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y) &= -12\cos(3x-2y-3),\\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) &= 8\cos(3x-2y-3).
\end{aligned}$$

Dále určíme hodnoty funkce f a těchto derivací v bodě $A=[0,1]$, tedy

$$\begin{aligned}
f(1,0) &= 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-2,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) &= 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)=0\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,0) &= -27, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(1,0)=18, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1,0)=-12, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,0)=8.
\end{aligned}$$

Taylorův polynom druhého řádu funkce f se středem $A=[x_0,y_0]$ určíme ze vztahu

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2\\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)(x-x_0)^3\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2\\
&+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)(y-y_0)^3.
\end{aligned}$$

Dostaneme

$$T(x,y)=3(x-1)-2y-\frac{9}{2}(x-1)^3+9(x-1)^2y-6(x-1)y^2+\frac{4}{3}y^3.$$

Implicitní funkce

Příklad 1. Určete rovnici tečny ke křivce k dané rovnicí

$$x^4 + y^2 + 2x^2y - 1 = 0$$

v bodě $A = [1, 0]$.

Řešení: Nejprve, ověříme, že bod A leží na zadané křivce k. Označíme $F(x, y) = x^4 + y^2 + 2x^2y - 1$ a vypočteme $F(A) = F(1, 0) = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$. Z toho vyplývá, že bod A na křivce k opravdu leží.

Dále ověříme, že daná rovnice určuje na okolí bodu A implicitní funkci y proměnné x. Vzhledem k tomu, že

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(A) = 2 \neq 0,$$

platí dle věty o implicitní funkci, že zadaná rovnice skutečně určuje na okolí bodu A implicitní funkci $y(x)$.

K určení rovnice tečny potřebujeme vypočítat $y'(x)$. Nyní uvažujeme y jako funkci proměnné x, takže levou stranu zadané rovnice můžeme chápat jako funkci proměnné x:

$$x^4 + (y(x))^2 + 2x^2y(x) - 1 = 0.$$

Pro zjednodušení zápisu budeme však dále psát pouze y a nikoli $y(x)$. Zadanou rovnici zderivujeme vzhledem k proměnné x a dostaneme

$$4x^3 + 2yy' + 4xy + 2x^2y' = 0.$$

Z toho plyne, že

$$y'(x) = \frac{-4x^3 - 4xy}{2y + 2x^2}.$$

Tuto derivaci lze vypočítat také pomocí vztahu

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{4x^3 + 4xy}{2y + 2x^2}.$$

V bodě $A = [1, 0]$ tedy dostaneme

$$y'(1) = -\frac{4 + 0}{0 + 2} = -2.$$

Rovnice tečny ke grafu funkce $y(x)$ v obecném bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Po dosazení bodu A do tohoto vztahu dostaneme

$$y - 0 = -2(x - 1),$$

což ještě můžeme upravit a dostaneme rovnici tečny ke křivce k v zadaném bodě ve tvaru

$$y = 2 - 2x.$$

Extrémy funkcí více proměnných

Příklad 1. Určete lokální extrémy funkce f dané předpisem

$$f(x,y) = e^x\left(y^2 + x^2 - 2x + 1\right).$$

Řešení: Nejprve stanovíme stacionární body funkce f tak, že vypočteme parciální derivace f podle obou proměnných a určíme body, ve kterých jsou tyto derivace nulové,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^x\left(y^2 + x^2 - 2x + 1\right) + e^x(2x-2) = e^x\left(y^2 + x^2 - 1\right) = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2ye^x = 0.
\end{aligned}$$

Ze druhé rovnice dostaneme $y = 0$. Tuto hodnotu dosadíme do první rovnice a získáme podmínku

$$x^2 - 1 = 0,$$

která je splněna, pokud $x = 1$ nebo $x = -1$. Funkce f má tedy dva stacionární body $[1,0]$ a $[-1,0]$.

Nyní na základě subdeterminantů Hessovy matice rozhodneme, zda funkce f má v těchto bodech lokální maximum nebo lokální minimum. Vypočteme proto parciální derivace funkce f druhého řádu,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= e^x\left(y^2 + x^2 - 1\right) + 2xe^x = e^x\left(y^2 + x^2 - 1 + 2x\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 2ye^x,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2e^x.
\end{aligned}$$

Hessova matice má tedy tvar

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^x\left(y^2 + x^2 - 1 + 2x\right) & 2ye^x \\ 2ye^x & 2e^x \end{pmatrix}.$$

Nejprve vyšetříme situaci v bodě $[1,0]$. V tomto bodě je Hessova matice rovna

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix}.$$

Pro subdeterminanty D_1 a D_2 této matice platí, že $D_1 = 2e > 0$ a $D_2 = 4e^2 > 0$, z čehož plyne, že funkce f má v bodě $[1,0]$ lokální minimum $f(1,0) = 0$.

Analogicky vyšetříme situaci v bodě $[-1,0]$. V tomto bodě dostaneme

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pro subdeterminanty D_1 a D_2 platí, že $D_1 = -2e^{-1} < 0$ a $D_2 = -4e^{-2} < 0$. Z toho vyplývá, že v bodě $[-1, 0]$ nemá funkce f lokální extrém.

Závěr tedy je, že funkce f má lokální minimum v bodě $[1, 0]$.

Příklad 2. Určete globální extrémy funkce f dané předpisem

$$f(x, y) = 2xy - x^2 - 4y$$

na množině

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 4\right\}.$$

Řešení: Zadaná množina M je obdélník $[0, 5] \times [0, 4]$. Funkce f je spojitá na M a množina M je uzavřená a omezená, z čehož na základě Weierstrassovy věty plyne, že funkce f má na množině M maximum i minimum a tyto extrémy můžeme určit tak, že nejprve určíme body, ve kterých by mohl nastat extrém a po té pomocí hodnot funkce f v těchto bodech určíme maximum a minimum.

Nejprve stanovíme stacionární body funkce f tak, že určíme parciální derivace funkce f podle obou proměnných a zjistíme, ve kterých bodech jsou tyto derivace nulové. Dostaneme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y - 2x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 4 = 0.$$

Ze druhé rovnice určíme $x = 2$ a po dosazení této hodnoty do první rovnice pak máme $y = 2$. Stacionární bod funkce f je tedy bod $[2, 2]$ a vzhledem k tomu, že tento bod patří do množiny M budeme ho uvažovat jako bod "podezřelý z extrému".

Nyní vyšetříme situaci na hranici množiny M, která se skládá ze čtyř částí určených rovnicemi $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$ a $y = 4$.

Rovnici první části hranice $x = 0$ dosadíme do předpisu funkce f a dostaneme tak funkci $g(y)$ jedné proměnné,

$$g(y) = f(0, y) = -4y.$$

Vzhledem k tomu, že první derivace této funkce $g'(y) = -4$ nemůže být nulová, nejsou na této části hranice kromě krajních bodů žádné další body podezřelé z extrému.

Rovnici druhé části hranice $x = 5$ také dosadíme do předpisu funkce f a dostaneme tak funkci

$$g(y) = f(5, y) = 10y - 25 - 4y = 6y - 25.$$

Vzhledem k tomu, že první derivace této funkce $g'(y) = 6$ nemůže být nulová, nejsou ani na této části hranice kromě krajních bodů žádné další body podezřelé z extrému.

Rovnici další části hranice $y = 0$ dosadíme do předpisu funkce f a dostaneme funkci

$$g(x) = f(x, 0) = -x^2.$$

Platí, že $g'(x) = -2x$ je rovno nule pro $x = 0$. Dostali jsme tedy bod $[0, 0]$, který patří do množiny M a je tedy bodem podezřelým z extrému. Poznamenejme, že tento bod je krajním bodem úsečky dané vztahy $y = 0$ a $x \in [0, 5]$ a proto ho považujeme za bod podezřelý z extrému také na základě toho, že je krajním bodem této části hranice.

Poslední část hranice je dána rovnicí $y = 4$. Po dosazení této podmínky do předpisu funkce f dostaneme funkci

$$g(x) = f(x, 4) = 8x - x^2 - 16.$$

Platí, že $g'(x) = 8 - 2x$ je rovno nule pro $x = 4$. Dostali jsme bod $[4, 4]$, který patří do množiny M a je tedy dalším bodem podezřelým z extrému.

Kromě výše uvedených bodů budeme dále považovat za podezřelé krajní body úseček, které tvoří hranici množiny M, což jsou vlastně vrcholy obdélníka M, tedy body $[0, 0]$, $[5, 0]$, $[0, 4]$ a $[5, 4]$.

Nyní určíme hodnoty funkce f ve všech nalezených bodech,

$$\begin{aligned}
f(2,2) &= 8 - 4 - 8 = -4,\\
f(0,0) &= 0 - 0 - 0 = 0,\\
f(4,4) &= 32 - 16 - 16 = 0,\\
f(5,0) &= 0 - 25 - 0 = -25,\\
f(0,4) &= 0 - 0 - 16 = -16,\\
f(5,4) &= 40 - 25 - 16 = -1.
\end{aligned}$$

Funkce f má tedy na množině M maximum 0 v bodech $[0, 0]$ a $[4, 4]$ a minimum -25 v bodě $[5, 0]$.

Příklad 3. Určete globální extrémy funkce f dané předpisem

$$f(x, y) = 8x + 6y$$

na množině

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

Řešení: Zadaná množina M je kruh o poloměru 3 se středem v bodě $[0, 0]$. Funkce f je spojitá na M a množina M je uzavřená a omezená, z čehož na základě Weierstrassovy věty plyne, že funkce f má na množině M maximum i minimum.

Nejprve stanovíme stacionární body funkce f tak, že určíme parciální derivace funkce f podle obou proměnných a zjistíme, ve kterých bodech jsou tyto derivace nulové. Dostaneme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6.$$

Tyto derivace nejsou v žádném bodě nulové a funkce f tedy nemá žádný stacionární bod.

Nyní vyšetříme situaci na hranici množiny M, tedy na kružnici dané rovnicí $x^2+y^2 = 9$. Použijeme Lagrangeovu metodu, která spočívá ve vyšetřování Lagrangeovy funkce

$$L(x, y) = 8x + 6y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 9\right).$$

Určíme body, které leží na hranici množiny M a pro které jsou hodnoty parciálních derivací funkce L nulové, tj. body které splňují

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 6 + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 9.$$

Z první a druhé rovnice určíme

$$x = -\frac{4}{\lambda}, \quad y = -\frac{3}{\lambda}.$$

Tyto dva vztahy dosadíme do třetí rovnice a dostaneme

$$\frac{16}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = \frac{25}{\lambda^2} = 9.$$

Tento vztah je splněn pro dvě hodnoty λ a to

$$\lambda = \frac{5}{3}, \quad \lambda = -\frac{5}{3}.$$

Pro tyto dvě hodnoty λ vypočítáme příslušné hodnoty x a y. Pro $\lambda = \frac{5}{3}$ je

$$x = -\frac{4}{\lambda} = -\frac{12}{5}, \quad y = -\frac{3}{\lambda} = -\frac{9}{5},$$

a pro $\lambda = -\frac{5}{3}$ máme

$$x = -\frac{4}{\lambda} = \frac{12}{5}, \quad y = -\frac{3}{\lambda} = \frac{9}{5}.$$

Dostali jsme tedy dva body $\left[-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right]$ a $\left[\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right]$, ve kterých by mohl nastat extrém. Zbývá určit hodnoty funkce f v těchto bodech a vybrat maximum a minimum. Vzhledem k tomu, že

$$f\left(-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right) = -30, \quad f\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right) = 30,$$

má funkce f na množině M maximum 30 v bodě $\left[\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right]$ a minimum -30 v bodě $\left[-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right]$.

Diferenciální rovnice

Příklad 1. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x^3 y + y^4}{x^4}, \quad y\,(1) = 1.$$

Řešení: Uvedená rovnice má smysl pro $x \neq 0$. Rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^4.$$

Pravou stranu tedy můžeme vyjádřit jako funkci proměnné $z = y/x$, což znamená, že se jedná o rovnici s homogenní funkcí na pravé straně. Tento typ rovnice lze řešit pomocí substituce $z = y/x$, přičemž z je stejně jako y funkce proměnné x. Do rovnice dosadíme $y = xz$ a $y' = xz' + z$ a dostaneme

$$xz' + z = z + z^4,$$

což dává po úpravě rovnici se separovatelnými proměnnými

$$z' = \frac{z^4}{x}. \tag{12}$$

Tuto rovnici vyřešíme metodou separace proměnných, kdy položíme $z' = dz/dx$, rovnici napíšeme ve tvaru

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^4}{x}$$

a po úpravě dostaneme pro $z \neq 0$ rovnici

$$\int \frac{1}{z^4}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx.$$

Vypočteme integrály a vyjádříme funkci z:

$$-\frac{1}{3z^3} = \ln|x| + c, \quad z = \frac{1}{\sqrt[3]{-3\ln|x| - 3c}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Toto řešení z jsme dostali za předpokladu, že $z \neq 0$. Nyní vyšetříme situaci pro $z = 0$ tak, že tento vztah dosadíme do diferenciální rovnice (12). Po dosazení máme $0 = 0$, z čehož plyne, že funkce $z = 0$ je také řešením.

Nyní provedeme zpětnou substituci $y = xz$. Dostaneme řešení

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{-3\ln|x| - 3c}}, \quad c \in \mathbb{R},$$

a dále řešení $y = 0$.

Zbývá určit řešení splňující zadanou počáteční podmínku $y\,(1) = 1$. Dosazením obecného řešení y do této podmínky získáme vztah

$$1 = y\,(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{-3\ln 1 - 3c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-3c}}.$$

Z toho plyne, že

$$1 = -\frac{1}{3c}, \quad c = -\frac{1}{3}.$$

Tuto hodnotu konstanty c dosadíme do předpisu obecného řešení a dostaneme řešení zadané úlohy

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{1 - 3\ln|x|}}, \quad x \in \left(0, e^{\frac{1}{3}}\right).$$

Interval jsme určili tak, aby obsahoval bod 1, ve kterém je předepsána počáteční podmínka, a aby byly splněny podmínky $x \neq 0$ a $1 \neq 3\ln x$. Na tomto intervalu ještě můžeme $|x|$ nahradit x.

Závěr tedy je, že řešením zadané úlohy je funkce

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{1 - 3\ln x}}, \quad x \in \left(0, e^{\frac{1}{3}}\right).$$

Příklad 2. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y' - \frac{y}{x} = xe^{5x}, \quad y(1) = 0.$$

Řešení: Jedná se o lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Nejprve určíme homogenní řešení, tedy řešení homogenní rovnice

$$y' - \frac{y}{x} = 0,$$

a to metodou separace proměnných. Položíme $y' = dy/dx$ a rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Provedeme separaci proměnných a pro $y \neq 0$ dostaneme

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx.$$

Vypočteme integrály a máme

$$\ln|y| = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Upravíme do tvaru

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+c} = e^{\ln|x|}e^c = |x|\, e^c$$

a odstraníme absolutní hodnotu

$$y = \pm e^c x = kx, \quad k = \pm e^c \neq 0.$$

K tomuto vztahu jsme dospěli za předpokladu, že $y \neq 0$. Dosazením $y = 0$ do homogenní rovnice snadno ověříme, že $y = 0$ je také řešení. Tato dvě řešení $y = kx$ pro $k \neq 0$ a $y = 0$ můžeme zapsat do jednoho tvaru a dostaneme tak výsledné homogenní řešení

$$y_H = kx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Nyní určíme partikulární řešení, tedy jedno konkrétní řešení zadané rovnice. Použijeme metodu variace konstant, která spočívá v tom, že toto partikulární řešení y_P hledáme v podobném tvaru jako homogenní řešení y_H s tím, že místo konstanty k nyní uvažujeme funkci $k(x)$, tj.

$$y_P = k(x)\, x.$$

Tuto funkci dosadíme do zadané rovnice a získáme vztah

$$k'(x)\, x + k(x) - \frac{k(x)\, x}{x} = xe^{5x}.$$

Po úpravě dostaneme $k'(x) = e^{5x}$ a integrací tohoto vztahu určíme funkci

$$k(x) = \int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{5}.$$

Z toho plyne, že partikulární řešení je

$$y_P = k(x)\, x = \frac{xe^{5x}}{5}.$$

Pro obecné řešení y dané rovnice platí, že

$$y = y_H + y_P = kx + \frac{xe^{5x}}{5}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zbývá určit řešení splňující zadanou počáteční podmínku, tedy

$$0 = y(1) = k + \frac{e^5}{5}.$$

Tato podmínka je splněna pro

$$k = -\frac{e^5}{5}.$$

Řešením dané úlohy je tedy funkce

$$y = -\frac{e^5}{5}x + \frac{xe^{5x}}{5} = \frac{x\left(e^{5x} - e^5\right)}{5}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 5y' + 4y = \cos(2x).$$

Řešení: Jedná se o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Určíme nejprve homogenní řešení, to znamená řešení rovnice

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

Této rovnici přísluší charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0, \tag{13}$$

která má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2},$$

to je kořeny $\lambda_1 = -4$ a $\lambda_2 = -1$. Z toho plyne, že homogenní řešení y_H má tvar

$$y_H = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dalším krokem je určení partikulárního řešení. K tomu využijeme toho, že pravá strana rovnice má speciální tvar, a nejprve porovnáme pravou stranu s tímto speciálním tvarem:

$$\cos(2x) = e^{ax} \left(P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx \right).$$

Vzhledem k tomu, že pravá strana této rovnice se musí rovnat levé straně, musí platit $a = 0$ a tedy $e^{ax} = e^0 = 1$ a dále $b = 2$, $P(x) = 1$ a $Q(x) = 0$. Vzhledem k tomu, že polynomy P a Q jsou konstanty, je jejich stupeň roven nule. Dle teorie hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_P(x) = x^k e^{ax} \left(R(x) \cos bx + S(x) \sin bx \right).$$

V tomto vyjádření jsou $R(x)$ a $S(x)$ polynomy, jejichž stupeň je $\max(st\, P, st\, Q) = 0$, to znamená, že to jsou konstanty a můžeme je označit $R(x) = A$ a $S(x) = B$. Zbývá určit parametr k. Za tímto účelem vyjádříme $\alpha = a \pm bi = 0 \pm 2i = \pm 2i$. Vzhledem k tomu, že α není kořenem charakteristické rovnice (13), klademe $k = 0$. Partikulární řešení má tedy tvar

$$y_P(x) = x^0 e^{0x} \left(A \cos 2x + B \sin 2x \right) = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Vypočteme jeho derivace

$$y_P'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad y_P''(x) = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

a dosadíme partikulární řešení a příslušné derivace do zadané rovnice. Dostaneme

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 10A \sin 2x + 10B \cos 2x + 4A \cos 2x + 4B \sin 2x = \cos 2x.$$

Porovnáním koeficientů u funkce $\cos 2x$ dostaneme

$$-4A + 10B + 4A = 1, \quad 10B = 1, \quad B = \frac{1}{10},$$

a analogicky porovnáním koeficientů u funkce $\sin 2x$ dostaneme

$$-4B - 10A + 4B = 0, \quad -10A = 0, \quad A = 0.$$

Partikulární řešení je tedy funkce

$$y_P = \frac{\sin 2x}{10}.$$

Obecné řešení zadané rovnice je funkce, která je součtem homogenního a partikulárního řešení, což je funkce

$$y = y_H + y_P = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} + \frac{\sin 2x}{10}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$