Taylorovy řady

Příklad 1. Určete rozvoj funkce f v Taylorovu řadu se středem v bodě a a rozhodněte, zda řada konverguje k dané funkci.

a) $f(x) = \cos x, \ a = 0,$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R}\right]$

b) $f(x) = \cos \sqrt{x}, \ a = 0,$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n}}{(2n)!}, \ x \in [0, \infty)\right]$

c) $f(x) = x \sin x^2, \ a = 0,$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}\right]$

d) $f(x) = e^{-x^3}, \ a = 0,$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}, \ x \in \mathbb{R}\right]$

e) $f(x) = \frac{1}{2+x}, \ a = 0,$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n}}{2^{n+1}}, \ x \in (-2, 2)\right]$

f) $f(x) = \ln(x+1), \ a = 0,$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \ x \in (-1, 1]\right]$

g) $f(x) = \frac{1}{1+3x}, \ a = 1,$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (x-1)^{n}}{4^{n+1}}, \ x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)\right]$

h) $f(x) = \operatorname{arctg} x, \ a = 0,$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1, 1]\right]$

i) $f(x) = \frac{1}{1+x}, \ a = 2.$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n}}{3^{n+1}}, \ x \in (-1, 5)\right]$