MATEMATIKA 3

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Fourierovy řady

Předpokládejme, že L je kladné reálné číslo.

Množina $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcí definovaných na $\mathbb{R}$ se nazývá trigonometrický systém.

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$, kde a_n a b_n jsou reálné koeficienty se nazývá trigonometrický polynom.

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$, kde a_n a b_n jsou reálné koeficienty se nazývá trigonometrická řada.

Předpokládejme, že f je periodická funkce s periodou $2L$ a f je integrovatelná, definujme

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \ \ n = 0, 1, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \ \ n = 1, 2 \ldots, \end{aligned}$$

potom řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

nazýváme Fourierova řada funkce f.

VĚTA: DIRICHLETOVA

Jestliže funkce f je periodická s periodou $2L$ a f splňuje tzv. Dirichletovy podmínky

a) f je omezená

b) f je po částech monotonní.

Potom

$F(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ve kterých je funkce spojitá,

$F(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{u \to x+} f(u) + \lim_{u \to x-} f(u)\right)$, pokud f není v x spojitá.

VĚTA: Předpokládejme, že funkce f je periodická s periodou $2L$ a f je integrovatelná.
a) Pokud f je sudá, potom $b_n = 0$ a Fourierova řada funkce f má tvar

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tomuto tvaru říkáme kosinová řada.

a) Pokud f je lichá, potom $a_n = 0$ a Fourierova řada funkce f má tvar

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tomuto tvaru říkáme sinová řada.

VĚTA: JORDANOVA

Jestliže funkce f je periodická s periodou $2L$, spojitá na intervalu $[-L, L]$ a má po částech spojitou derivaci, potom Fourierova řada funkce f konverguje k f stejnoměrně na $\mathbb{R}$.