MATEMATIKA 3

Dana Černá

http://kmd.fp.tul.cz

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Integrální součet pro funkce dvou proměnných

Předpoklad: funkce f je omezená na intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$

Definujme dělení intervalu I:

$D = D^x \times D^y$, kde $D^x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n : a \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b\}$,
$D^y = \{y_0, y_1, \ldots, y_n : c = y_0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_m = d\}$,

a jeho normu $\|D\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1})$.

Zvolme $v_{ij} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ a označme
$V = \{v_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.

$S(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(v_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$
se nazývá integrální součet funkce f pro dělení D a množinu bodů V.

Integrální součet pro funkce tří proměnných

Předpoklad: funkce f je omezená na $I = [a, b] \times [c, d] \times [g, h]$

Definujme dělení intervalu I a jeho normu:

$D = D^x \times D^y \times D^z$, kde

$$D^x = \{x_0, x_1, \dots, x_n : a \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b\},$$
$$D^y = \{y_0, y_1, \dots, y_n : c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_m = d\},$$
$$D^z = \{z_0, z_1, \dots, z_n : c = z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_m = d\},$$
$$\|D\| = \max_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m, 1\leq k\leq p} (x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}, z_p - z_{p-1}).$$

Zvolme $v_{ijk} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ a označme
$V = \{v_{ijk} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p\}$.

$$S(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(v_{ijk})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

se nazývá integrální součet funkce f pro dělení D a množinu V.

Definice dvojného a trojného integrálu na intervalu

Předpokládejme, že funkce f je omezená na uzavřeném intervalu I. Řekneme, že funkce f je integrovatelná na množině I, jestliže posloupnost $\left\{S\left(f, D^k, V^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje pro každou posloupnost $\left\{D^k\right\}$ takovou, že $\lim_{k\to\infty}\left\|D^k\right\| = 0$, a libovolnou volbu bodů V^k.

Potom všechny takové posloupnosti mají stejnou limitu, která se nazývá integrál funkce f na I a značí se $\int_I f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.

Pokud f je funkce dvou proměnných, potom se integrál nazývá dvojný a značí se $\iint\limits_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Pokud f je funkce tří proměnných, potom se integrál nazývá trojný a značí se $\iiint\limits_I f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Integrál na omezené množině

Předpokládejme, že funkce f je definována na omezené množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Definujme

$$\begin{aligned} f_M(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad && \mathbf{x} \in M, \\ &= 0, && \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M. \end{aligned}$$

Řekneme, že funkce f je integrovatelná na M, jestliže f_M je integrovatelná na nějakém intervalu $I \supset M$, a potom integrál funkce f na M je definován:

$$\int_M f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} := \int_I f_M(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Vlastnosti integrálu

VĚTA: Linearita integrálu
Jestliže funkce f a g jsou integrovatelné na množině M a $a,\ b \in \mathbb{R}$, potom je funkce $a\,f + b\,g$ integrovatelná na M a platí:

$$\int\limits_M a\,f(\mathbf{x}) + b\,g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = a\int\limits_M f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + b\int\limits_M g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

VĚTA: Jestliže $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ a $\Omega_1 \cap \Omega_2$ je prázdná množina nebo část hranice a jestliže f je integrovatelná na Ω_1 a Ω_2, potom f je integrovatelná na Ω a platí:

$$\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega_1} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_2} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Fubiniova věta pro dvojný integrál

Jestliže je funkce f spojitá na množině

$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\}$,

kde ϕ a ψ jsou spojité funkce, potom f je integrovatelná na M a platí

$$\iint\limits_{M} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{a}^{b} \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Analogicky: Jestliže je funkce f spojitá na množině

$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\right\}$,

kde ϕ a ψ jsou spojité funkce, potom f je integrovatelná na M a platí

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Fubiniova věta pro trojný integrál

Jestliže je funkce f spojitá na množině

$M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : a\leq x\leq b, \phi(x)\leq y\leq\psi(x)\,, g\,(x,y)\leq z\leq h(x,y)\}$,

kde ϕ, ψ, g a h jsou spojité funkce, potom f je integrovatelná na M a platí

$$\iiint\limits_M f\,(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} \int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} f\,(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Měřitelná množina

Definice: Řekneme, že omezená množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná (v Jordanově smyslu), jestliže $\int_M 1 \, \mathrm{d}x$ existuje a číslo $\mu_n(M) = \int_M 1 \, \mathrm{d}x$ nazýváme Jordanova míra množiny M.

Věta: Jestliže funkce f je integrovatelná na množině $M \subset \mathbb{R}^n$ a $G \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina taková, že $\mu_n(M \backslash G) = \mu_n(G \backslash M) = 0$, potom f je integrovatelná na G a platí

$$\int_M f(x) \, \mathrm{d}x = \int_G f(x) \, \mathrm{d}x,$$

specielně potom

$$\int_M f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\bar{M}} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{int\, M} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Jakobián

Definice: Jestliže zobrazení $g = (g_1, \ldots, g_n) : M \to \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$, má spojité parciální derivace $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ na M pro $i, j = 1, \ldots n$, potom zobrazení J_g definované předpisem:

$$J_g(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix},$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M$, se nazývá Jakobián zobrazení g.

Substituce ve vícerozměrných integrálech

Věta: O SUBSTITUCI

Jestliže $M, N \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené měřitelné množiny a jestliže zobrazení $g = (g_1, \ldots, g_n) : M \to \mathbb{R}^n$, $g(M) = N$, a funkce $f : \bar{N} \to \mathbb{R}$ splňují:

- g má spojité parciální derivace $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ na M pro $i, j = 1, \ldots n$,
- g je prosté na M,
- J_g je nenulový na M,
- f je spojitá na $\bar{N}$,

potom f je integrovatelná na N a platí

$$\int_N f(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f(g(y))\,|J_g(y)|\,\mathrm{d}y.$$