MATEMATIKA 3

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Osnova:

- Komplexní funkce - definice, posloupnosti, řady
- Vybrané komplexní funkce
- Limita, spojitost, derivace komplexní funkce
- Integrál komplexní funkce

Komplexní funkce

Zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$, se nazývá komplexní funkce. Množina M se nazývá definiční obor funkce f a značí se $D(f)$.

Věta 1: Ke každé komplexní funkci f existují reálné funkce dvou proměnných u a v takové, že

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \forall z = x + iy \in M,$$

kde $x = Re\ z$ a $y = Im\ z$.

Funkce u z Věty 1 se nazývá reálná část funkce f a značí se $Re\ f$, funkce v z Věty 1 se nazývá imaginární část funkce f a značí se $Im\ f$.

Posloupnosti a řady

Zobrazení $z : n \mapsto z_n$ množiny $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\}$ do $\mathbb{C}$ nazýváme posloupnost komplexních čísel a značíme $\{z_n\}_{n=N}^{\infty}$.

Řekneme, že posloupnost $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}$, konverguje a má limitu A, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $K \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|z_n - A| < \epsilon \quad \forall n \geq K.$$

Symbol $\sum\limits_{n=N}^{\infty} z_n$, kde $z_n \in \mathbb{C}$ nazýváme řada.

Řekneme, že řada $\sum\limits_{n=N}^{\infty} z_n$ konverguje a má součet s, jestliže posloupnost částečných součtů $s_k = \sum\limits_{n=k}^{\infty} z_n$ konverguje k s.

Posloupnosti funkcí

Předpoklad: Jsou dány reálné funkce $f_n : I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{C}$, $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$.

Množinu $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ nazýváme posloupnost funkcí.

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ konverguje na množině $M \subset I$, jestliže číselná posloupnost $\{f_n(c)\}_{n=N}^{\infty}$ konverguje pro všechna $c \in M$.

Množina $O = \{c \in I : \{f_n(c)\}_{n=N}^{\infty} \text{ konverguje}\}$ se nazývá obor konvergence posloupnosti $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$.

Řekneme, že funkce $f : O \to \mathbb{C}$ je limita posloupnosti $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$, jestliže $f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$ pro všechna $c \in O$.

Řady funkcí

Symbol $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ nazýváme řadou funkcí.

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ konverguje na množině $M \subset I$, jestliže číselná řada $\sum_{n=N}^{\infty} f_n(c)$ konverguje pro všechna $c \in M$.

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ konverguje absolutně na množině $M \subset I$, jestliže číselná řada $\sum_{n=N}^{\infty} |f_n(c)|$ konverguje pro všechna $c \in M$.

Množina $O = \{c \in I : \sum_{n=N}^{\infty} f_n(c) \, \text{konverguje}\}$ se nazývá obor konvergence řady $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$.

Množina $\{c \in I : \sum_{n=N}^{\infty} f_n(c) \, \text{konverguje absolutně}\}$ se nazývá obor absolutní konvergence řady $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$.

Řekneme, že funkce $s : O \to \mathbb{C}$ je limita součet řady $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$, jestliže $s(c) = \sum_{n=N}^{\infty} f_n(c)$ pro všechna $c \in O$.

Vybrané komplexní funkce

Funkci sinus, kosinus a exponenciální funkci definujeme v komplexním oboru pomocí řad:

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}, \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}, \\
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

VĚTA: Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platí

$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)$, kde $x = Re\ z, y = Im\ z$,

$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i\sin z,$

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$

Zobrazení, které každému komplexnímu číslu z přiřadí číslo ϕ takové, že platí

$$z = |z|\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)$$

nazýváme argument a značíme $Arg\ z$.

Pokud se omezíme na hodnoty $\phi \in [0, 2\pi)$, potom mluvíme o hlavní hodnotě argumentu a zobrazení značíme $arg\ z$.

Funkce logaritmus je definována předpisem

$$Ln\ z = ln\,|z| + i\ Arg\ z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Hlavní hodnota (větev) logaritmu je definována předpisem

$$ln\ z = ln\,|z| + i\ arg\ z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Mocninná funkce je definována předpisem

$$z^{\alpha} = e^{\alpha Ln\, z}, \quad \alpha, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Limita, spojitost a derivace komplexní funkce

Předpokládejme, že funkce f je definována v $P_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta, z \neq z_0\}$ pro nějaké $\delta > 0$. Řekneme, že f má v bodě z_0 limitu A, jestliže pro každou poloupnost $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takovou, že $z_n \in D(f)$, $z_n \to z_0$, platí $\lim\limits_{z_n \to z_0} f(z_n) = A$. Značíme $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Řekneme, že komplexní funkce f je spojitá v bodě z_0, jestliže $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Řekneme, že funkce f je spojitá na oblasti $M \subset \mathbb{C}$, jestliže je spojitá v každém bodě oblasti M.

Řekneme, že funkce f má v bodě z derivaci A, jestliže

$$A = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Derivaci funkce f v bodě z značíme $f'(z)$.

VĚTA: CAUCHYHO - RIEMANNOVA

Jestliže funkce f je definována na okolí bodu z_0, $x_0 = Re\, z_0$, $y_0 = Im\, z_0$, $u = Re\, f$, $v = Im\, f$, potom funkce f má v bodě z_0 derivaci, právě když funkce u a v mají spojité parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ a splňují Cauchyho-Riemannovy podmínky, tj.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

v bodě $[x_0, y_0]$. Potom platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Pokud má funkce f derivaci v každém bodě oblasti M, potom řekneme, že f je holomorfní na M.

VĚTA: Pokud funkce f je holomorfní na oblasti M, potom f má v M derivace všech řádů.

Integrál funkce komplexní proměnné

Parametrizace úsečky s počátečním bodem A a koncovým bodem B:
$z(t) = A + (B - A)\,t, \quad t \in [0, 1]$

Parametrizace kružnice se středem S a poloměrem r:
$z(t) = S + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

Předpokládejme, že k je jednoduchá hladká křivka s parametrizací $z : [a, b] \to \mathbb{C}$, orientovaná souhlasně s parametrizací, a funkce f je spojitá a jednoznačná na oblasti M, $k \subset M$. Potom definujeme integrál funkce f po křivce k vztahem

$$\int_k f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

Pokud k je po částech hladká křivka, $k = k_1 \cup k_2 \cup \ldots \cup k_n$, k_i je hladká křivka, potom definujeme

$$\int\limits_k f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{k_i} f(z)\,dz.$$

VĚTA: CAUCHYOVA

Jestliže je funkce f holomorfní v jednoduše souvislé oblasti M, $k \subset M$ je jednoduchá po částech hladká křivka s počátečním bodem A a koncovým bodem B, potom

$$\int\limits_k f(z)\,dz = F(B) - F(A),$$

kde F je funkce primitivní k f, tj. $F' = f$ na M.
Jestliže je k navíc uzavřená, potom $\int\limits_k f(z)\,dz = 0$.