MATEMATIKA 3

Dana Černá

http://kmd.fp.tul.cz

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Křivka

Pokud zobrazení $P = (P_1, \ldots, P_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ splňuje

- P je spojité a prosté s možnou výjimkou $P(a) = P(b)$,
- P_i' jsou po částech spojité na $[a, b]$,
- $P'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in (a, b)$, ve kterých derivace existuje,

potom $k = \{P(t), t \in [a, b]\}$ nazýváme jednoduchá po částech hladká křivka a zobrazení P nazýváme parametrizace křivky.

Křivka se nazývá uzavřená, jestliže $P(a) = P(b)$, jinak se nazývá otevřená.

Orientace otevřené křivky

Jeden z bodů $P(a)$ a $P(b)$ otevřené křivky k označme jako počáteční, druhý jako koncový, tím je určena orientace křivky.

Řekneme, že křivka k je souhlasně orientovaná s parametrizací P, jestliže $P(a)$ je počáteční bod, jinak řekneme, že křivka k je nesouhlasně orientovaná s parametrizací P.

Orientace uzavřené křivky

V případě uzavřené křivky zvolíme body $P_1, P_2, P_3 \in k$ a stanovíme pořadí probíhání. Tím křivku orientujeme.

Jestliže pro $t_1 < t_2 < t_3 \in [a, b]$ takové, že $t_1, t_2, t_3 \in [a, b]$, $\{P(t_1), P(t_2), P(t_3)\} = \{P_1, P_2, P_3\}$, je stanovené pořadí $P(t_1), P(t_2), P(t_3)$ nebo $P(t_2), P(t_3), P(t_1)$ nebo $P(t_3), P(t_1), P(t_2)$, potom řekneme, že křivka k je souhlasně orientovaná s parametrizací P, jinak řekneme, že křivka k je nesouhlasně orientovaná s parametrizací P.

Křivkový integrál skalární funkce (prvního druhu)

předpoklady: k je jednoduchá po částech hladká křivka s parametrizací $P : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ a $f : k \to \mathbb{R}$ je omezená na k.

Zvolme $t_0, \ldots, t_n$ takové, že $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Označme $P_i = P(t_i)$, potom $D = \{P_i, i = 0, \ldots, n\}$ se nazývá dělení D křivky k.

Křivka k je potom rozdělena dělícími body $P_0, \ldots, P_n$ na oblouky $\widehat{P_i P_{i+1}}$ a norma dělení D je definována $\|D\| = \max_{i=1..n} d\left(\widehat{P_{i-1} P_i}\right)$, kde d označuje délku oblouku.

Zvolme $v_i \in \widehat{P_{i-1} P_i}$ a označme $V = \{v_i, i = 1..n\}$.

$S(f, D, V) := \sum_{i=1}^{n} f(v_i) \|P_{i-1} P_i\|_2$, kde $\|P_{i-1} P_i\|_2$ označuje Euklidovskou normu vektoru $P_{i-1} P_i$, nazýváme integrální součet funkce f pro dělení D křivky k a množinu bodů V.

Křivkový integrál skalární funkce f je definován

$$\int\limits_{k} f(P)\, ds := \lim_{\|D^k\| \to 0} S\left(f, D^k, V^k\right),$$

pokud tato limita existuje.

VĚTA: Jestliže k je jednoduchá po částech hladká křivka s parametrizací $P : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ a f je omezená na k, potom

$$\int\limits_{k} f(P)\, ds = \int\limits_{a}^{b} f(P(t)) \left\|P'(t)\right\|_2 dt,$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

VĚTA: Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na parametrizaci křivky, tj. jestliže P_1 a P_2 jsou parametrizace jednoduché po částech hladké křivky k, potom

$$\int_k f(P_1)\,ds = \int_k f(P_2)\,ds.$$

VĚTA: LINEARITA INTEGRÁLU
Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$, potom platí

$$\int_k af(P) + bg(P)\,ds = a\int_k f(P)\,ds + b\int_k g(P)\,ds,$$

pokud integrály na pravé straně existují.

VĚTA: Jestliže pro jednoduchou po částech hladkou křivku k platí $k = k_1 \cup k_2$ a počáteční bod k_2 je roven koncovému bodu k_1, potom

$$\int_k f(P)\,ds = \int_{k_1} f(P)\,ds + \int_{k_2} f(P)\,ds,$$

Křivkový integrál vektorové funkce (druhého druhu)

předpoklady: k je jednoduchá po částech hladká křivka s parametrizací $P : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ a $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_d) : k \to \mathbb{R}^d$ je omezená na k.

Zvolme $t_0, \ldots, t_n$ takové, že $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Označme $P_i = P(t_i)$ $D = \{P_i, i = 0, \ldots, n\}$ se nazývá dělení D křivky k.

Křivka k je potom rozdělena dělícími body $P_0, \ldots, P_n$ na oblouky $\widehat{P_i P_{i+1}}$ a norma dělení D je definována $\|D\| = \max\limits_{i=1..n} d\left(\widehat{P_{i-1} P_i}\right)$, kde d označuje délku oblouku.

Zvolme $v_i \in \widehat{P_{i-1} P_i}$ a označme $V = \{v_i, i = 1..n\}$.

$S(f, D, V) := \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(v_i) \cdot (P_i - P_{i-1})$ nazýváme integrální součet funkce f pro dělení D křivky k a množinu bodů V.

Křivkový integrál vektorové funkce $\vec{f}$ je definován

$$\int\limits_k \vec{f}(P)\, d\vec{s} := \lim_{\|D^k\| \to 0} S\left(f, D^k, V^k\right),$$

pokud tato limita existuje.

VĚTA: Jestliže k je jednoduchá po částech hladká křivka s parametrizací $P : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ a $\vec{f} : k \to \mathbb{R}^d$ je omezená na k, potom

$$\int\limits_k \vec{f}(P)\, d\vec{s} = \pm \int\limits_a^b \vec{f}(P(t)) \cdot P'(t)\, dt,$$

pokud integrál na pravé straně existuje. V uvedeném vztahu platí znaménko $+$, pokud k je souhlasně orientovaná s parametrizací, jinak platí znaménko $-$.

VĚTA: Křivkový integrál druhého druhu nezávisí na parametrizaci křivky, tj. jestliže P_1 a P_2 jsou parametrizace orientované jednoduché po částech hladké křivky k, potom

$$\int_k \vec{f}\,(P_1)\,d\vec{s} = \int_k \vec{f}\,(P_2)\,d\vec{s}.$$

VĚTA: LINEARITA INTEGRÁLU

Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$, potom platí

$$\int_k a\vec{f}\,(P) + b\vec{g}\,(P)\,d\vec{s} = a\int_k \vec{f}\,(P)\,d\vec{s} + b\int_k \vec{g}\,(P)\,d\vec{s},$$

pokud integrály na pravé straně existují.

Greenova věta

Křivka $k \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá kladně orientovaná, jestliže je orientovaná proti směru pohybu hodinových ručiček.

VĚTA: GREENOVA

Jestliže $k \subset \mathbb{R}^2$ je kladně orientovaná jednoduchá po částech hladká křivka, f_1, f_2, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ jsou spojité na oblasti G obsahující $\overline{\mathrm{int}\, k}$. Potom platí

$$\oint_k f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy = \iint\limits_{\mathrm{int}\, k} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,dxdy.$$