MATEMATIKA 3

Dana Černá

https://kmd.fp.tul.cz

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Osnova:

- Výpočet křivkového integrálu pomocí potenciálu
- Nutná a postačující podmínka pro existenci potenciálu
- Výpočet potenciálu

Zobrazení $\vec{f} : M \to \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$, se nazývá vektorová funkce nebo vektorové pole. Jestliže existuje funkce $u : M \to \mathbb{R}$ taková, že $\operatorname{grad} u = \vec{f}$ na M, potom se vektorové pole $\vec{f}$ nazývá potenciální v M a funkce u se nazývá potenciál vektorového pole $\vec{f}$.

VĚTA: Jestliže vektorové pole $\vec{f}$ je spojitě diferencovatelné v oblasti M, má v M potenciál u a $k \subset M$ je jednoduchá po částech hladká křivka s počátečním bodem A a koncovým bodem B, potom platí

$$\int_k \vec{f}(P)\,\mathrm{d}\vec{s} = u(B) - u(A),$$

specielně jeli k uzavřená, potom $\oint_k \vec{f}(P)\,\mathrm{d}\vec{s} = 0.$

Řekneme, že křivkový integrál vektorové funkce $\vec{f}$ nezávisí v oblasti M na cestě, jestliže pro libovolné dvě křivky $k_1, k_2 \subset M$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B platí

$$\int\limits_{k_1} \vec{f}(P)\,\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{k_2} \vec{f}(P)\,\mathrm{d}\vec{s}.$$

Tento integrál značíme také

$$\int\limits_{A}^{B} \vec{f}(P)\,\mathrm{d}\vec{s}.$$

VĚTA: Je-li vektorové pole $\vec{f}$ spojitě diferencovatelné v oblasti M, potom křivkový integrál nezávisí v M na cestě, právě když $\vec{f}$ je potenciální na M.

Řekneme, že oblast $M \subset \mathbb{R}^n$ je jednoduše souvislá, jestliže doplněk M v $\mathbb{R}^n$ je souvislá množina.

VĚTA: Jestliže má vektorové pole $\vec{f} = (f_1, f_2)$ spojité parciální derivace na jednoduše souvislé oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$, potom $\vec{f}$ je potenciální na M, právě když

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \text{na } M.$$

.

Rotace vektorového pole $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ je definována předpisem

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

.

VĚTA: Jestliže má vektorové pole $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ spojité parciální derivace na jednoduše souvislé oblasti $M \subset \mathbb{R}^3$, potom $\vec{f}$ je potenciální na M, právě když $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$ na M.