MATEMATIKA 3

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Osnova:

- Mocninné řady - definice, poloměr konvergence
- Operace s mocninnými řadami
- Derivování a integrování mocninných řad
- Taylorovy řady

Mocninné řady

Řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{1}$$

nazýváme mocninnou řadou. Reálné číslo a se nazývá střed mocninné řady, čísla $c_n \in \mathbb{R}$ se nazývají koeficienty řady.

VĚTA: Pro každou mocninnou řadu (1) existuje $R \in \mathbb{R}^*$ takové, že řada konverguje a to absolutně na intervalu $(a-R, a+R)$ a nekonverguje na $(-\infty, a-R) \cup (a+R, \infty)$. Platí

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|},$$

pokud pro nějaké $N \in \mathbb{N}$ je $c_n \neq 0 \ \forall n > N$ a limita existuje.

R se nazývá poloměr konvergence mocninné řady (1).

Operace s mocninnými řadami

Jestliže $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ a $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ konvergují na intervalu I, potom

a) $B(x) + C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n)(x-a)^n$ pro všechna $x \in I$,

b) $B(x) - C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n)(x-a)^n$ pro všechna $x \in I$,

c) $\alpha B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha b_n (x-a)^n$ pro všechna $x \in I$,

d) $B(x)\,C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0)(x-a)^n$ pro všechna $x \in I$.

Derivování a integrování mocninných řad

VĚTA: Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ má obor konvergence I a poloměr konvergence R, potom platí

a) řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c,d] \subset (a-R, a+R)$,

b) součet řady $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ je spojitá funkce na I,

c) $s'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n (x-a)^n)'$ pro $x \in (a-R, a+R)$,

d) $\int_c^d s(x)\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \int_c^d (x-a)^n\,dx$, pokud $[c,d] \subset (a-R, a+R)$.

Taylorovy řady

Opakování: Předpokládejme, že funkce f má v intervalu I derivace až do řádu $N+1$ a $a \in I$, potom polynom

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in I,$$

se nazývá Taylorův polynom stupně N funkce f se středem a.

Potom ke každému $x \in I$ existuje ξ ležící mezi x a a takové, že zbytek $R_N(x) = f(x) - T_N(x)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}.$$

Tomuto tvaru říkáme Lagrangeův tvar zbytku.

Předpokládejme, že funkce f má v intervalu I derivace všech řádů a $a \in I$, potom se řada

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad x \in I,$$

nazývá Taylorova řada funkce f se středem a.

VĚTA: Za výše uvedených předpokladů platí: $f(x) = T(x)$ pro všechna $x \in I$, právě když $\lim\limits_{N \to \infty} R_N(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.