# MATEMATIKA 3

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Osnova:

- Definice plochy
- Plošný integrál skalární funkce
- Plošný integrál vektorové funkce

## Plocha

Nechť $B \subset \mathbb{R}^2$ je omezená uzavřená souvislá množina, jejíž hranice $\partial B$ je jednoduchá po částech hladká křivka, a zobrazení $P = (P_1, P_2, P_3) : B \to \mathbb{R}^3$ splňuje

- $P$ je spojité a prosté na $B$ s možnou výjimkou: obrazy bodů z $\partial B$ mohou splývat,
- $P_u = \left( \frac{\partial P_1}{\partial u}, \frac{\partial P_2}{\partial u}, \frac{\partial P_3}{\partial u} \right)$ a $P_v = \left( \frac{\partial P_1}{\partial v}, \frac{\partial P_2}{\partial v}, \frac{\partial P_3}{\partial v} \right)$ jsou spojité na $\operatorname{int} B$,
- $P_u \times P_v \neq 0$ na $\operatorname{int} B$.

Potom $S = \{P(u, v),\ [u, v] \in B\}$ se nazývá jednoduchá hladká plocha, $P$ se nazývá parametrizace plochy $S$ a $\partial S = P(\partial B)$ se nazývá okraj plochy $S$.

Jestliže množina $S$ splňuje podmínky

- $S$ je souvislá,
- $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$, kde $S_1$, $S_2, \ldots, S_n$ jsou hladké plochy,
- v průniku množin $\bigcup\limits_{i=1}^{j} S_i$ a $S_{j+1}$ leží pouze některé body z okrajů těchto množin,

potom se $S$ nazývá jednoduchá po částech hladká plocha.

Normálový vektor $\vec{\nu}$ v bodě $P_0 = P(u_0, v_0)$ splňuje
$\vec{\nu}(P_0) = P_u(u_0, v_0) \times P_v(u_0, v_0)$.

## Plošný integrál skalární funkce

VĚTA: Jestliže $S$ je jednoduchá hladká plocha s parametrizací $P : B \to \mathbb{R}^3$, $f : S \to \mathbb{R}$ je omezená spojitá funkce. Potom

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\ \mathrm{d}S = \iint\limits_B f(P(u, v))\, \|\vec{\nu}(u, v)\|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Je-li $S$ po částech hladká, $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$, kde $S_1,\ S_2, \ldots, S_n$ jsou hladké plochy, potom

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\ \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{S_i} f(x, y, z)\ \mathrm{d}S.$$

## Orientace plochy

Řekneme, že plocha je orientovatelná, jestliže má dvě strany. Na jednu stranu umístíme jednotkové normálové vektory a tím ji orientujeme.

Plocha $S$ se nazývá souhlasně orientovaná s parametrizací, jestliže pro jednotkový normálový vektor v každém bodě plochy (až na množinu míry nula) platí

$$\vec{n} = \frac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|}.$$

Plocha $S$ se nazývá nesouhlasně orientovaná s parametrizací, jestliže pro jednotkový normálový vektor v každém bodě plochy (až na množinu míry nula) platí

$$\vec{n} = -\frac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|}.$$

## Plošný integrál vektorové funkce

VĚTA: Jestliže $S$ je jednoduchá hladká plocha orientovaná souhlasně s parametrizací $P : B \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^3$ je omezená spojitá funkce. Potom

$$\iint_S \vec{f}(x, y, z)\ \mathrm{d}\vec{S} = \iint_B \vec{f}(P(u, v))\,\vec{\nu}(u, v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Je-li $S$ po částech hladká, $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$, kde $S_1, S_2, \ldots, S_n$ jsou hladké plochy, potom

$$\iint_S \vec{f}(x, y, z)\ \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} \vec{f}(x, y, z)\ \mathrm{d}\vec{S}.$$

## Gaussova-Ostrogradského věta

Pokud plocha $S$ je uzavřená, potom plošný integrál $\iint\limits_S \vec{f}(x,y,z)\ \mathrm{d}\vec{S}$ značíme také $\oiint\limits_S \vec{f}(x,y,z)\ \mathrm{d}\vec{S}$.

VĚTA: Jestliže $S$ je uzavřená jednoduchá po částech hladká plocha orientovaná tak, že normálový vektor směřuje vně, a $\vec{f}:\overline{intS}\to\mathbb{R}^3$ a $div\vec{f}$ jsou spojité funkce na $\overline{intS}$, potom

$$\oiint\limits_S \vec{f}(x,y,z)\ \mathrm{d}\vec{S} = \iiint\limits_{intS} div\vec{f}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

## Stokesova věta

Plocha se nazývá souhlasně orientovaná se svým okrajem, jestliže při obíhání po okraji ve směru jeho orientace je jednotkový normálový vektor vlevo.

VĚTA: Jestliže $S$ je jednoduchá po částech hladká plocha orientovaná souhlasně se svým okrajem $k$ a $\vec{f}$ a parciální derivace $\vec{f}$ jsou spojité na $\overline{int\ S}$, potom

$$\oint_k \vec{f}(P)\ \mathrm{d}\vec{s} = \iint_S rot\ \vec{f}\ \mathrm{d}\vec{S}.$$