MATEMATIKA 3

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Osnova:

- Bodová konvergence posloupností a řad
- Stejnoměrná konvergence posloupností a řad
- Derivování a integrování posloupností a řad

Bodová konvergence posloupností

Předpoklad: Jsou dány reálné funkce $f_n : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$.

Množinu $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ nazýváme posloupnost funkcí.

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ konverguje na množině $M \subset I$, jestliže číselná posloupnost $\{f_n(c)\}_{n=N}^{\infty}$ konverguje pro všechna $c \in M$.

Množina $O = \{c \in I : \{f_n(c)\}_{n=N}^{\infty} \text{ konverguje}\}$ se nazývá obor konvergence posloupnosti $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$.

Řekneme, že funkce $f : O \to \mathbb{R}$ je limita posloupnosti $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$, jestliže $f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$ pro všechna $c \in O$.

Bodová konvergence řad

Symbol $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ nazýváme řadou funkcí.

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ konverguje na množině $M \subset I$, jestliže číselná řada $\sum_{n=N}^{\infty} f_n(c)$ konverguje pro všechna $c \in M$.

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ konverguje absolutně na množině $M \subset I$, jestliže číselná řada $\sum_{n=N}^{\infty} |f_n(c)|$ konverguje pro všechna $c \in M$.

Množina $O = \{c \in I : \sum_{n=N}^{\infty} f_n(c) \,\text{konverguje}\}$ se nazývá obor konvergence řady $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$.

Množina $\{c \in I : \sum_{n=N}^{\infty} f_n(c) \,\text{konverguje absolutně}\}$ se nazývá obor absolutní konvergence řady $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$.

Řekneme, že funkce $s : O \to \mathbb{R}$ je limita součet řady $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$, jestliže $s(c) = \sum_{n=N}^{\infty} f_n(c)$ pro všechna $c \in O$.

Opakování: Kritéria konvergence číselných řad

Limitní podílové kritérium

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Limitní odmocninové kritérium

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Integrální kritérium

Jestliže existuje funkce f spojitá kladná a nerostoucí na $[N, \infty]$, $f(n) = a_n$ pro $n \geq N$, potom řada $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\int\limits_{N}^{\infty} f(x)\, dx < \infty$.

Leibnizovo kritérium

Jestliže $a_n = (-1)^n b_n$, $b_n > 0$ pro všechna $n \geq N$ nebo $b_n < 0$ pro všechna $n \geq N$, $a_N > 0$ a posloupnost $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ je nerostoucí, potom řada $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Stejnoměrná konvergence posloupností

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na M, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $K \geq N$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n \geq K, \ \forall x \in M.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

VĚTA: Jestliže f_n jsou funkce spojité na intervalu M a $f_n \rightrightarrows f$ na M, potom funkce f je spojitá na M.

Stejnoměrná konvergence řad

Řekneme, že řada $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k funkci s na M, jestliže $\sum_{n=N}^{k} f_n \rightrightarrows s$ na M. Funkce s se nazývá součet řady $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$.

VĚTA: Jestliže f_n jsou funkce spojité na intervalu M a $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k funkci s na M, potom funkce s je spojitá na M.

VĚTA: Weierstrassovo kritérium
Jestliže $|f_n(x)| \leq a_n$ pro všechna $x \in M$, $n \geq N$, $a_n \in \mathbb{R}$, a $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje, potom řada $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ konverguje absolutně a stejnoměrně na M.

Řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ z předchozí věty se nazývá konvergentní majoranta.

Derivování posloupností a řad funkcí

VĚTA: Jestliže posloupnost funkcí $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ konverguje alespoň v jednom bodě $c \in (a, b)$ a jestliže posloupnost $\{f_n'\}_{n=N}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na (a, b), potom

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n' \quad \text{na}\,(a, b)\,.$$

VĚTA: Jestliže řada $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ konverguje alespoň v jednom bodě $c \in (a, b)$ a jestliže řada $\sum_{n=N}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na (a, b), potom

$$\left(\sum_{n=N}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=N}^{\infty} f_n' \quad \text{na}\,(a, b)\,.$$

Integrování posloupností a řad funkcí

VĚTA: Jestliže f_n jsou spojité na $[a,b]$ a jestliže posloupnost $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$, potom

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx.$$

VĚTA: Jestliže f_n jsou spojité na $[a,b]$ a jestliže a řada $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$, potom

$$\int_a^b \sum_{n=N}^{\infty} f_n \, dx = \sum_{n=N}^{\infty} \int_a^b f_n \, dx.$$

Předchozí věty platí také pro neurčitý integrál.