MATEMATIKA 3

Dana Černá

kmd.fp.tul.cz

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Komplexní funkce

Definice: Zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$, nazýváme komplexní funkce (komplexní proměnné). Zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, nazýváme komplexní funkce reálné proměnné.

Věta 1: Ke každé funkci $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$, existují dvě reálné funkce dvou reálných proměnných takové, že

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \text{kde } x = Re\, z \text{ a } y = Im\, z.$$

Ke každé funkci $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, existují dvě reálné funkce jedné reálné proměnné takové, že

$$f(t) = u(t) + iv(t), \quad \text{kde } t \in M.$$

Definice: Funkci u z Věty 1. nazýváme reálná část komplexní funkce f a značíme ji Re f. Funkci v z Věty 1. nazýváme imaginární část komplexní funkce f a značíme ji Im f.

Analýza komplexní funkce reálné proměnné

Definice: Jestliže $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, $u = Re\, f$ a $v = Im\, f$, potom definujeme:

$$\lim_{t \to a} f(t) := \lim_{t \to a} u(t) + i \lim_{t \to a} v(t),$$

$$f'(t) := u'(t) + iv'(t),$$

$$\int f(t)\, dt := \int u(t)\, dt + i \int v(t)\, dt,$$

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt,$$

pokud jednotlivé výrazy na pravé straně mají smysl.

Exponenciální funkce v komplexním oboru

Komplexní funkce definovaná předpisem

$$e^z = e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \sin y),$$

kde $z \in \mathbb{C}$, $x = Re\, z$, $y = Im\, z$, se nazývá exponenciální funkce.

Lemma: Platí $\int e^{pt} dt = \frac{e^{pt}}{p}$, kde $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Důkaz: Položme $x = Re\, p$ a $y = Im\, p$, potom platí

$$\begin{aligned}
\left(e^{pt}\right)' &= \left(e^{xt+iyt}\right)' = \left(e^{xt} (\cos yt + i \sin yt)\right)' \\
&= xe^{xt} (\cos yt + i \sin yt) + e^{xt} (-y \sin yt + iy \cos yt) \\
&= (x + iy) e^{xt} \cos yt + (ix - y) e^{xt} \sin yt \\
&= (x + iy) e^{xt} \cos yt + (x + iy) e^{xt} i \sin yt = pe^{pt}.
\end{aligned}$$

Laplaceova transformace

Laplaceovou transformací nazýváme zobrazení, které funkci $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ přiřadí funkci danou předpisem

$$\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) = F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt,$$

kde $p \in \mathbb{C}$ je takové, že uvedený integrál existuje. Funkce F se nazývá Laplaceův obraz funkce f.

Linearita Laplaceovy transformace

VĚTA: Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a existuje $\mathcal{L}(f)$ a $\mathcal{L}(g)$, potom existuje i Laplacův obraz funkce $af + bg$ a platí

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g).$$

Definice: Řekneme, že funkce $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je exponenciálního řádu, jestliže existují konstanty $C, D \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$|f(t)| \leq Ce^{Dt}, \quad t \in [0, \infty).$$

D se nazývá řád funkce.

Existence Laplaceovy transformace

Věta: Jestliže funkce $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je po částech spojitá funkce exponenciálního řádu, potom Laplaceova transformace funkce f existuje.

Laplaceova transformace derivace

Metodou per-partes počítejme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f'\right\}(p) &= \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt} dt \\
&= \left[f(t)\, e^{-pt}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt \\
&= \lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-pt} - f(0) + pF(p)\,.
\end{aligned}$$

Platí $\lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-pt} = 0$, pokud f je po částech spojitá funkce exponenciálního řádu a p je větší než řád f.

Pokud f a f' jsou po částech spojité funkce exponenciálního řádu, potom tedy platí
$\mathcal{L}\left\{f'\right\}(p) = pF(p) - f(0)$.

Laplaceova transformace derivace

Věta: Pokud f, f', f'', ..., $f^{(n)}$ jsou po částech spojité funkce exponenciálního řádu. Potom existuje Laplaceova transformace funkce $f^{(n)}$ a platí

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}(p) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Laplaceova transformace konvoluce

Definice: Konvolucí funkcí $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ nazýváme funkci definovanou předpisem

$$f * g\,(t) = \int_0^t f\,(x)\,g\,(t-x)\,dx, \quad t \in [0, \infty)\,,$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Věta: Pokud $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ jsou po částech spojité funkce exponenciálního řádu, potom

$$\mathcal{L}\,(f * g) = \mathcal{L}\,(f)\,\mathcal{L}\,(g)\,.$$

Definice: Skoková funkce (Heaviside step function) je definována předpisem:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Laplaceova transformace translace

Věta: Jestliže $a > 0$ a funkce f má Laplaceův obraz F, potom platí:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,H(t-a)\}(p) = e^{-ap}F(p).$$