Varianta 0

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 1 = \sin 2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iiint\limits_M z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde množina M je určena podmínkami: $x^2 + z^2 \leq 4$, $y \in [0, 3]$. Graficky znázorněte množinu M.

Příklad 3. Pomocí Greenovy věty vypočtěte

$$\int\limits_k \left(2y + \sin x^2\right) \mathrm{d}x + (xy + \cos y)\,\mathrm{d}y,$$

kde k je kladně orientovaná křivka daná rovnicí $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete Fourierovu řadu pro 2π-periodickou funkci, která je daná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi), \\ -1 & x \in (-\pi, 0), \\ 0 & x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

a rozhodněte, zda tato řada konverguje k funkci f. Rozhodnutí zdůvodněte.

Příklad 5. Napište Cauchyovu větu.

Varianta 1

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4 = \cos 2x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_S x \; \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x + y + z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Pomocí Greenovy věty vypočtěte

$$\int\limits_k \left(y^2 + \mathrm{arctg} x\right) \mathrm{d}x + \left(x + 2\cos y^3\right) \mathrm{d}y,$$

kde k je kladně orientovaná křivka daná rovnicí $4x^2 + y^2 = 4$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete Taylorovu řadu funkce $\cos x^2$ se středem v bodě 0 a rozhodněte, zda tato řada konverguje k dané funkci. Rozhodnutí zdůvodněte.

Příklad 5. Napište Stokesovu větu.

Varianta 2a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = e^{-2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S x + y \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x \in [0,2]$, $y^2 + z^2 = 9$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_k y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z,$$

kde křivka k je daná podmínkami: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2y$, a probíhá body $[-2,0,0]$, $[0,2,4]$ a $[2,0,0]$ v uvedeném pořadí. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete poloměr konvergence a obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{n+1}.$$

Příklad 5. Napište Dirichletovu větu.

Varianta 2b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y' = \cos 2t,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 1.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S y + z \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $y \in [0, 1]$, $x^2 + z^2 = 4$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_k z \, \mathrm{d}x + \, \mathrm{d}y - x \, \mathrm{d}z,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $x^2 + z^2 = 9$, $z = y$, a probíhá body $[-3, 0, 0]$, $[0, 3, 3]$ a $[3, 0, 0]$ v uvedeném pořadí. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete poloměr konvergence a obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (x-2)^n}{2^n}.$$

Příklad 5. Napište větu o Jordanově kritériu stejnoměrné konvergence Fourierových řad.

varianta 11a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 3y' = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \ y(0) = 1, \ y'(0) = 3.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\int_k xyz \, \mathrm{d}s,$$

kde křivka k je daná podmínkami: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$, $y \geq 0$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\iint_S 2x \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}z + 3z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je vnější strana povrchu tělesa M daného podmínkami: $z^2 \geq x^2 + y^2$, $z \in [0, 2]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^{n+1}.$$

Příklad 5. Napište větu o Weierstrassově kritériu stejnoměrné konvergence řad.

varianta 11b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' = \cos(t + \pi), \; y(0) = 1, \; y'(0) = -2.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\int_k y^2 \, \mathrm{d}s,$$

kde křivka k je daná podmínkami: $y^2 + z^2 = 9$, $x = 1$, $z \geq 0$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\iint_S 2x \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je vnější strana povrchu tělesa M daného podmínkami: $z \geq x^2 + y^2$, $z \in [0, 4]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{n+2}.$$

Příklad 5. Napište definici stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí.

varianta 9a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' + y = \sin t + \cos t,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_S z \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2+y^2 = z^2$, $z \in [0, 4]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Pomocí Greenovy věty vypočtěte

$$\int\limits_k \cos x^2 \mathrm{d}x + \left(\frac{x}{3} + y^2\right) \mathrm{d}y,$$

kde k je kladně orientovaná křivka daná rovnicí $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete Taylorovu řadu funkce $\sin x^2$ se středem v bodě 0 a rozhodněte, zda tato řada konverguje k dané funkci. Rozhodnutí zdůvodněte.

Příklad 5. Definujte pojmy mocninná řada, střed mocninné řady a koeficienty mocninné řady.

varianta 9b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \cos t - \sin t,\ \ y\,(0) = 0,\ \ y'\,(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_S y \ \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2+z^2 = y^2$, $y \in [0,1]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Pomocí Greenovy věty vypočtěte

$$\int\limits_k (2y+2x)\ \mathrm{d}x + \sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y,$$

kde k je kladně orientovaná křivka daná rovnicí $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete Taylorovu řadu funkce e^{2x} se středem v bodě 0 a rozhodněte, zda tato řada konverguje k dané funkci. Rozhodnutí zdůvodněte.

Příklad 5. Napište větu o poloměru konvergence mocninné řady.

varianta 12a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' = \cos t,\ \ y\,(0) = -1,\ \ y'\,(0) = 2.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_S y \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $2x + y + z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int\limits_k \sqrt{1 + 20x^2}\,\mathrm{d}s,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $z = x^2 + y^2$, $y = 2x$, $x \in [0, 3]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x^2 - 1\right)^n}{n}.$$

Příklad 5. Napište Fubiniovu větu pro dvojný integrál.

varianta 12b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3 = te^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S x\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x + 3y + z = 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_k \sqrt{1 + 18x^2}\,\mathrm{d}s,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $z = 2x^2 + y^2$, $y = x$, $y \in [0, 2]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 - x^2)^n}{2^n}.$$

Příklad 5. Napište Fubiniovu větu pro trojný integrál.

varianta 10a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' = te^t,\ y\,(0) = 1,\ y'\,(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je určena podmínkami: $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ a $0 \leq y$. Graficky znázorněte množinu M.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int\limits_k x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z,$$

kde k je úsečka s počátečním bodem $[1,1,2]$ a koncovým bodem $[0,0,0]$.

Příklad 4. Určete Taylorovu řadu funkce $\cos 3x$ se středem v bodě 0 a rozhodněte, zda tato řada konverguje k dané funkci. Rozhodnutí zdůvodněte.

Příklad 5. Napište větu o výpočtu křivkového integrálu skalární funkce (křivkového integrálu prvního druhu).

varianta 10b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' = te^{-t}, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 2.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_M x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde množina M je určena podmínkami: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ a $x \leq y$. Graficky znázorněte množinu M.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int\limits_k y \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}y + x \, \mathrm{d}z,$$

kde k je úsečka s počátečním bodem $[2, 4, 2]$ a koncovým bodem $[0, 0, 0]$.

Příklad 4. Určete Taylorovu řadu funkce e^{3x} se středem v bodě 0 a rozhodněte, zda tato řada konverguje k dané funkci. Rozhodnutí zdůvodněte.

Příklad 5. Napište větu o výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce (křivkového integrálu druhého druhu).

varianta 10c

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' = te^{2t},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_M 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je určena podmínkami: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ a $x \leq 0$. Graficky znázorněte množinu M.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_k x^2 \,\mathrm{d}x + y^2 \,\mathrm{d}y + z^2 \,\mathrm{d}z,$$

kde k je úsečka s počátečním bodem $[9, 3, 3]$ a koncovým bodem $[0, 0, 0]$.

Příklad 4. Určete Taylorovu řadu funkce $\sin 5x$ se středem v bodě 0 a rozhodněte, zda tato řada konverguje k dané funkci. Rozhodnutí zdůvodněte.

Příklad 5. Napište definici jednoduché po částech hladké křivky.

varianta 13a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4 = f,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0,4)$ a $f(t) = 3$ pro $t \geq 4$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_S x^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = y$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\oint\limits_k y\,\mathrm{d}x - (x + 7y)\,\mathrm{d}y,$$

kde k je kladně orientovaná křivka, která tvoří obvod trojúhelníka s vrcholy $[-1,0]$, $[3,0]$ a $[0,3]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x^2-4)^n}{2^n}.$$

Příklad 5. Napište definici funkce sinus v komplexním oboru a vypočtěte hodnotu $\sin i$.

varianta 13b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 1 = f,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0,2)$ a $f(t) = 4$ pro $t \geq 2$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S x^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2+y^2 = z^2$, $z \in [1,3]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte délku křivky k, kde k je určena podmínkami: $x^2+5y^2 = 5$, $z = 2y$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x+1}{x}\right)^{n+2}.$$

Příklad 5. Napište definici funkce logaritmus v komplexním oboru a vypočtěte hodnotu $\ln i$.

varianta 13c

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3 = f,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0, 1)$ a $f(t) = 2$ pro $t \geq 1$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S z^2 \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2 + z^2 \leq 9$, $y = x$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\oint_k (x + y)\, \mathrm{d}x - (x - y)\, \mathrm{d}y,$$

kde k je kladně orientovaná křivka, která tvoří obvod trojúhelníka s vrcholy $[0, -2]$, $[2, 0]$ a $[0, 2]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{4^n}.$$

Příklad 5. Napište definici funkce kosinus v komplexním oboru a vypočtěte hodnotu $\cos 2i$.

varianta 14a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' + y = e^{-t},\ y\left(0\right) = 0,\ y\left(1\right) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_S xy\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $4x + 2y + z = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int\limits_{[0,0]}^{[1,\pi]} \left(2 + 3x^2 \cos y\right)\,\mathrm{d}x + \left(2 - x^3 \sin y\right)\mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{n+1}\left(x-1\right)^n}{n^2}.$$

Příklad 5. Napište větu o nutné a postačující podmínce pro existenci potenciálu funkce dvou proměnných.

varianta 14b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3t},\ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_{S} x + y \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $2x + y + 4z = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int\limits_{[0,0]}^{[\pi,2]} y^2 (\cos x - \sin x)\ \mathrm{d}x + (2y(\sin x + \cos x) + 1)\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(x-2)^n}{n}.$$

Příklad 5. Napište větu o nutné a postačující podmínce pro existenci potenciálu funkce tří proměnných.

varianta 14c

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = e^t,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_S y + z \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $3x + y + z = 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int\limits_{[0,0]}^{[3,1]} \left(3x^2 e^y + 2x\right) \mathrm{d}x + \left(x^3 e^y + 1\right) \mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n\,(x-3)^n}{3^{2n+1}}.$$

Příklad 5. Napište větu o výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu.

varianta 16a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = e^{-2t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\int_k z^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y = x$, a má počáteční bod $[0, 0, 3]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\iint_S x + y + z\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 4. Určete poloměr konvergence a obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{2^{2n+1}}.$$

Příklad 5. Napište definici Fourierovy řady.

varianta 16b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' = \cos t,\ \ y\,(0) = 2,\ \ y'\,(0) = -4.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\int_k x^3 \,\mathrm{d}x + y^3 \,\mathrm{d}y + z^3 \,\mathrm{d}z,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z = x$, a má počáteční bod $[0, 2, 0]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\iint_S z^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2 + z^2 = 25$, $0 \leq y \leq 2$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 4. Určete poloměr konvergence a obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}\,(x-1)^n}{n+1}.$$

Příklad 5. Napište Dirichletovu větu o konvergenci Fourierovy řady.

varianta 16c

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3y = e^{-t},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\int_k x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z = y$, a má počáteční bod $[1, 0, 0]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\iint_S y^2\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $y^2 + z^2 = 9$, $0 \leq x \leq 1$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 4. Určete poloměr konvergence a obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}(x-2)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Příklad 5. Napište Jordanovu větu o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady.

varianta 14d

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = \cos t,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S z - 2y \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $2x - 2y + z = 4$, $x \geq 0$, $y \leq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_{[0,0]}^{[3,\pi]} (2x\cos y + y)\,\mathrm{d}x + \left(1 + x - x^2 \sin y\right)\mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n\, n^3}.$$

Příklad 5. Definujte pojmy potenciál a potenciální vektorové pole. Rozhodněte, zda je potenciál určen jednoznačně a rozhodnutí zdůvodněte.

varianta 17a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 5y = e^{3t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\int_k \sqrt{3z^2 + 1}\,\mathrm{d}s,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $4 = y^2 + 4z^2$, $x = 3$, $y \leq 0$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\iiint_M x^2 + y^2 \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde těleso M je určena podmínkami: $x^2 + y^2 \leq z$, $z \leq 4$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Graficky znázorněte těleso M.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^2 - 6)^n}{n^2}.$$

Příklad 5. Napište větu o integrování posloupnosti funkcí.

varianta 17b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y = e^t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\int_k \frac{zx^2}{\sqrt{3y^2+1}}\,\mathrm{d}s,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $4 = x^2 + 4y^2$, $z = 7$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\iiint_M x\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde těleso M je určena podmínkami: $y^2 + z^2 \leq x$, $x \leq 4$, $y^2 + z^2 \leq 1$. Graficky znázorněte těleso M.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^2-5)^n}{n^3}.$$

Příklad 5. Napište větu o integrování řady funkcí.

varianta 18a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3 = f,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0, 3)$ a $f(t) = 6$ pro $t \geq 3$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S \frac{z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $z = 9 - x^2 - y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 5$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_{[0,0]}^{\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} \left(\sin(x+y) + x\cos(x+y)\right)\, \mathrm{d}x + \left(x\cos(x+y) + 3\right) \mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Příklad 5. Napište Stokesovu větu.

varianta 18b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 5 = f,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0, 6)$ a $f(t) = 2$ pro $t \geq 6$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $z = 16 - x^2 - y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 7$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_{[0,0]}^{[\pi,\pi]} (\cos(x+y) - x\sin(x+y))\ \mathrm{d}x + (5 - x\sin(x+y))\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}(x-1)^{n+1}}{n}.$$

Příklad 5. Napište Greenovu větu.

varianta 19a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,1]$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y = \cos 2t,\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S x \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $3x + 2y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_k z \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y + 2x \, \mathrm{d}z,$$

kde křivka k je určena podmínkami: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, počáteční bod křivky k je bod $[0, 1, 0]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n^2+1}.$$

Příklad 5. Napište definici stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí.

varianta 19b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,1]$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 9y = \cos 3t,\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S y \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $4x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_k x \,\mathrm{d}x + 2y \,\mathrm{d}y + 3z \,\mathrm{d}z,$$

kde křivka k je určena podmínkami: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, počáteční bod křivky k je bod $[1,0,0]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{n^2+2}.$$

Příklad 5. Napište Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence řad.

varianta 28a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3 = f,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0,1)$ a $f(t) = t$ pro $t \geq 1$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_S y^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2+y^2 = 16$, $z \in [1,3]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int\limits_{[0,0]}^{[\pi,1]} (\sin(xy) + xy\cos(xy))\,\mathrm{d}x + \big(x^2\cos(xy) + 2y\big)\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

Příklad 5. Napište definici holomorfní funkce a větu o derivacích holomorfní funkce.

varianta 28b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' = f,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0, 2)$ a $f(t) = t$ pro $t \geq 2$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $z = x^2 + y^2$, $z \in [1, 9]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_{[0,0]}^{[3,1]} \left(e^{xy} + xye^{xy} + 1\right) \mathrm{d}x + x^2 e^{xy} \mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n\, 3^{n+1}}.$$

Příklad 5. Napište Cauchyho-Riemannovu větu.

varianta 29a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y = e^{-t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S xy \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x + 2y + z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_k \sqrt{\frac{x}{y} + 4z}\,\mathrm{d}s,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $z = x^2 + y^2$, $y = x$, $x \in [1, 2]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n+1}}{4^n}.$$

varianta 29b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0,\infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3y = e^{-t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S 4x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha S tvoří povrch čtyřstěnu, který je dán podmínkami: $x+y+4z \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Normálový vektor plochy S směřuje vně čtyřstěnu. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_k x + y + z\,\mathrm{d}s,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{\sqrt{3n+1}}.$$

varianta 30a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y' = te^{-t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S y \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2 + (y-1)^2 = z^2$, $z \in [0, 4]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_k \frac{\sqrt{1+3y^2}}{z} \,\mathrm{d}s,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $x^2 + 4y^2 = 4$, $z = 2$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^n.$$

varianta 30b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' = te^{2t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S x \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $(x+1)^2 + y^2 = z^2$, $z \in [0, 2]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_k \sqrt{1+4z}\,\mathrm{d}s,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $x^2 + y^2 = z$, $y = x$, $z \in [0, 1]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{n+1}.$$

varianta 31a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' + y = e^{-t},\ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S xy\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x + 2y + 4z = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_{[0,0]}^{[3,2\pi]} \left(2 + 3x^2 \cos y\right)\,\mathrm{d}x + \left(2 - x^3 \sin y\right)\mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4^{n+1}(x-2)^n}{n^2}.$$

varianta 31b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3t}, \; y(0) = 0, \; y(1) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S x + y \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x + y + 2z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_{[0,0]}^{[2\pi,1]} y^2 (\cos x - \sin x) \, \mathrm{d}x + (2y(\sin x + \cos x) + 1) \, \mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1} (x-2)^n}{n+1}.$$

varianta 31c

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = e^t,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S y + z \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $6x + y + z = 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int_{[0,0]}^{[2,2]} \left(3x^2 e^y + 2x\right) \mathrm{d}x + \left(x^3 e^y + 1\right) \mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\,(x-3)^n}{3^{3n+1}}.$$

varianta 31d

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = \cos t,\ \ y\,(0) = 0,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_{S} z - 2y \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $2x - 2y + z = 2$, $x \geq 0$, $y \leq 0$ a $z \geq 0$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\int\limits_{[0,0]}^{[1,\pi]} (2x\cos y + y)\,\mathrm{d}x + \big(1 + x - x^2 \sin y\big)\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n\, n^3}.$$

varianta 32a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2 = f,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0, 4)$ a $f(t) = 3$ pro $t \geq 4$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S z^2 \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = y$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\oint_k (x + y)\ \mathrm{d}x - (x + 4y)\,\mathrm{d}y,$$

kde k je kladně orientovaná křivka, která tvoří obvod trojúhelníka s vrcholy $[-1, 0]$, $[3, 0]$ a $[0, 3]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x^2 - 2)^n}{4^n}.$$

varianta 32b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 3 = f,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0, 2)$ a $f(t) = 4$ pro $t \geq 2$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S y^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2+y^2 = z^2$, $z \in [1, 3]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte délku křivky k, kde k je určena podmínkami: $x^2 + 17y^2 = 17$, $z = 4y$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{3x - 1}{x} \right)^{n+1}.$$

varianta 32c

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 1 = f,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0, 1)$ a $f(t) = 3$ pro $t \geq 1$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint\limits_S z^2 \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2 + z^2 \leq 4$, $y = x$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\oint\limits_k (2x + y)\ \mathrm{d}x - (2x - y)\, \mathrm{d}y,$$

kde k je kladně orientovaná křivka, která tvoří obvod trojúhelníka s vrcholy $[0, -2]$, $[2, 0]$ a $[0, 2]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{9^n}.$$

varianta 32d

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 1 = f, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0, 5)$ a $f(t) = 3$ pro $t \geq 5$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S y^2 \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2 + y^2 = z^2$, $z \in [1, 5]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte délku křivky k, kde k je určena podmínkami: $10x^2 + y^2 = 10$, $z = 3x$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{4^n}.$$

varianta 33a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y' = \cos t,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -4.$$

Příklad 2. Vypočtěte

$$\int\limits_k x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka k je dána podmínkami: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z = x$, a má počáteční bod $[0, 2, 0]$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 3. Vypočtěte

$$\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2 + z^2 = 25$, $0 \leq y \leq 2$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 4. Určete poloměr konvergence a obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}\,(x-2)^n}{n+1}.$$

varianta 34a

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2 = f,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0, 2)$ a $f(t) = 3$ pro $t \geq 2$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S xy \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2+y^2 = z^2$, $z \in [1, 4]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte délku křivky k, kde k je určena podmínkami: $x^2+3y^2 = 6$, $z = \sqrt{2}y$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x + 1}{x} \right)^n.$$

varianta 34b

Příklad 1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte na intervalu $[0, \infty)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 1 = f, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 3,$$

kde $f(t) = 0$ pro $t \in [0, 5)$ a $f(t) = 2$ pro $t \geq 5$.

Příklad 2. Vypočtěte

$$\iint_S y^2 \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami: $x^2 + y^2 = z^2$, $z \in [2, 3]$. Graficky znázorněte plochu S.

Příklad 3. Vypočtěte délku křivky k, kde k je určena podmínkami: $2x^2 + y^2 = 4$, $z = x$. Graficky znázorněte křivku k.

Příklad 4. Určete obor bodové konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+1)^n}{3x^n}.$$

Výsledky

Varianta 0

1. $y(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} - \dfrac{x^2}{2}$, **2.** 12π, **3.** $-\pi$, **4.** $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\sin(2n+1)x}{(2n+1)\pi}$, Fourierova řada funkce f konverguje k f na $\mathbb{R}$.

Varianta 1

1. $y(x) = \dfrac{5}{4} - \dfrac{\cos 2x}{4} - 2x^2$, **2.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, **3.** 2π, **4.** $\cos x^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Varianta 2a

1. $y(t) = \dfrac{e^{-2t}}{5} - \dfrac{\cos t}{5} + \dfrac{7\sin t}{5}$, **2.** 12π, **3.** 8π, **4.** $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

Varianta 2b

1. $y(t) = -\dfrac{4e^{-t}}{5} - \dfrac{\cos 2t}{5} + \dfrac{\sin 2t}{10}$, **2.** 2π, **3.** 18π, **4.** $(0, 4)$.

Varianta 11a

1. $y(t) = \dfrac{11e^{3t}}{10} - \dfrac{\cos t}{10} - \dfrac{3\sin t}{10}$, **2.** 0, **3.** 16π, **4.** $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$.

Varianta 11b

1. $y(t) = \dfrac{4e^{-2t}}{5} + \dfrac{\cos t}{5} - \dfrac{2\sin t}{5}$, **2.** $\dfrac{27\pi}{2}$, **3.** 32π, **4.** $(-\infty, -1)$.

Varianta 9a

1. $y(t) = \dfrac{e^{-t}}{2} + \dfrac{\sin t}{2} - \dfrac{\cos t}{2}$, **2.** $\dfrac{128\sqrt{2}\,\pi}{3}$, **3.** 2π, **4.** $\sin x^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Varianta 9b

1. $y(t) = \dfrac{e^{t}}{2} - \dfrac{\sin t}{2} - \dfrac{\cos t}{2}$, **2.** $\dfrac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}$, **3.** -6π, **4.** $e^{2x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Varianta 12a

1. $y(t) = \dfrac{-4e^{-2t}}{5} + \dfrac{2\sin t}{5} - \dfrac{\cos t}{5}$, **2.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, **3.** $183\sqrt{5}$, **4.** $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Varianta 12b

1. $y(t) = -\dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{te^{2t}}{4} - \dfrac{e^{2t}}{4}$, **2.** $\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$, **3.** $50\sqrt{2}$, **4.** $\left(-\sqrt{6}, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \sqrt{6}\right)$.

Varianta 10a

1. $y(t) = te^t - 2e^t + t + 3$, **2.** $\dfrac{7\,\pi}{3}$, **3.** -3, **4.** $\cos 3x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 9^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$.

Varianta 10b

1. $y(t) = te^{-t} + 2e^{-t} + 3t - 2$, **2.** $20\,\pi$, **3.** $-\dfrac{5}{2}$, **4.** $e^{3x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$.

Varianta 10c

1. $y(t) = \dfrac{te^{2t}}{4} - \dfrac{e^{2t}}{4} + \dfrac{t}{4} + \dfrac{13}{4}$, **2.** $\dfrac{15\,\pi}{2}$, **3.** -261, **4.** $\sin 5x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 5^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$.

Varianta 13a

1. $y(t) = \dfrac{3\,(t-4)^2\, H\,(t-4)}{2} + 3t - 2t^2$, **2.** $4\pi\sqrt{2}$, **3.** -12, **4.** $\left(-\sqrt{6}, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \sqrt{6}\right)$,
5. $1,175i$.

Varianta 13b

1. $y(t) = 2\,(t-2)^2\, H\,(t-2) - \dfrac{t^2}{2} + 1$, **2.** $20\pi\sqrt{2}$, **3.** $2\pi\sqrt{5}$, **4.** $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$, **5.** $\dfrac{\pi i}{2}$.

Varianta 13c

1. $y(t) = (t-1)^2\, H\,(t-1) - \dfrac{3t^2}{2} + 2$, **2.** $\dfrac{81\pi\sqrt{2}}{4}$, **3.** -8, **4.** $(1,5)$, **5.** $3,76$.

Varianta 14a

1. $y(t) = \dfrac{(t^2-t)\, e^{-t}}{2}$, **2.** $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$, **3.** $1 + 2\pi$, **4.** $\left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right]$.

Varianta 14b

1. $y(t) = \dfrac{(t^2-t)\, e^{-3t}}{2}$, **2.** $2\sqrt{21}$, **3.** -2, **4.** $\left[\dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{4}\right)$.

Varianta 14c

1. $y(t) = \dfrac{(t^2-t)\, e^{t}}{2}$, **2.** $24\sqrt{11}$, **3.** $27e + 10$, **4.** $(-6, 12)$.

Varianta 16a

1. $y(t) = \dfrac{e^{-2t}}{5} + \dfrac{4\cos t}{5} + \dfrac{2\sin t}{5}$, **2.** $\dfrac{27}{2\sqrt{2}}$, **3.** 18π, **4.** $(-1, 7)$.

Varianta 16b

1. $y(t) = \dfrac{11e^{-2t}}{5} - \dfrac{\cos t}{5} + \dfrac{2\sin t}{5}$, **2.** -2, **3.** 250π, **4.** $\left[\dfrac{8}{9}, \dfrac{10}{9}\right)$.

Varianta 16c

1. $y(t) = \dfrac{e^{-t}}{4} + \dfrac{7\cos\sqrt{3}t}{4} + \dfrac{\sin\sqrt{3}t}{4\sqrt{3}}$, **2.** 0, **3.** 27π, **4.** $\left[\dfrac{15}{8}, \dfrac{17}{8}\right)$.

Varianta 14d

1. $y(t) = \dfrac{t\sin t}{2} + \dfrac{3\pi\sin t}{4}$, **2.** 16, **3.** $4\pi - 9$, **4.** $[-2, 4]$.

Varianta 17a

1. $y(t) = \dfrac{e^{3t}}{14} - \dfrac{\cos\sqrt{5}t}{14} + \dfrac{11\sin\sqrt{5}t}{14\sqrt{5}}$, **2.** $\dfrac{5\pi}{2}$, **3.** $\dfrac{5\pi}{3}$, **4.** $\left[-\sqrt{7}, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, \sqrt{7}\right]$.

Varianta 17b

1. $y(t) = \dfrac{e^{t}}{5} + \dfrac{9\cos 2t}{5} - \dfrac{\sin 2t}{10}$, **2.** 7π, **3.** $\dfrac{47\pi}{48}$, **4.** $\left[-\sqrt{6}, -2\right] \cup \left[2, \sqrt{6}\right]$.

Varianta 18a

1. $y(t) = 3(t-3)^2 H(t-3) + 2 - \dfrac{3t^2}{2}$, **2.** 7π, **3.** $\dfrac{5\pi}{2}$, **4.** $\left[\dfrac{8}{9}, \dfrac{10}{9}\right)$.

Varianta 18b

1. $y(t) = (t-6)^2 H(t-6) + 4 - \dfrac{5t^2}{2}$, **2.** $\dfrac{171\pi}{4}$, **3.** 6π, **4.** $\left[\dfrac{24}{25}, \dfrac{26}{25}\right)$.

Varianta 19a

1. $y(t) = \dfrac{t\sin 2t - \sin 2t}{4}$, **2.** $\dfrac{\sqrt{14}}{108}$, **3.** $\dfrac{1}{4}$, **4.** $\left[\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$.

Varianta 19b

1. $y(t) = \dfrac{t\sin 3t - \sin 3t}{6}$, **2.** $\dfrac{\sqrt{18}}{24}$, **3.** $\dfrac{3}{4}$, **4.** $\left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right]$.

Varianta 28a

1. $y(t) = 1 - \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{(t-1)^3 H(t-1)}{6} + \dfrac{(t-1)^2 H(t-1)}{2}$, **2.** 128π, **3.** 1, **4.** $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

Varianta 28b

1. $y(t) = 2 + t + \dfrac{(t-2)^3 H(t-2)}{6} + (t-2)^2 H(t-2)$, **2.** 168π, **3.** $3e^3 + 3$, **4.** $[0, 6)$.

Varianta 29a

1. $y(t) = \dfrac{e^{-t}}{3} + \dfrac{2\cos\left(\sqrt{2}t\right)}{3} + \dfrac{\sin\left(\sqrt{2}t\right)}{3\sqrt{2}}$, **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, **3.** $\dfrac{59\sqrt{2}}{3}$, **4.** $(0,4)$.

Varianta 29b

1. $y(t) = \dfrac{e^{-t}}{4} - \dfrac{\cos\left(\sqrt{3}t\right)}{4} + \dfrac{5\sin\left(\sqrt{3}t\right)}{4\sqrt{3}}$, **2.** $\dfrac{56}{3}$, **3.** 6π, **4.** $(-2,0)$.

Varianta 30a

1. $y(t) = 1 - te^{-t} - \dfrac{t^2e^{-t}}{2}$, **2.** $16\sqrt{2}\pi$, **3.** $\dfrac{5\pi}{2}$, **4.** $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Varianta 30b

1. $y(t) = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{9e^{2t}}{8} - \dfrac{te^{2t}}{4} + \dfrac{t^2e^{2t}}{4}$, **2.** $-4\sqrt{2}\pi$, **3.** $\dfrac{14}{3}$, **4.** $\left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$.

Varianta 31a

1. $y(t) = \dfrac{(t^2-t)\,e^{-t}}{2}$, **2.** $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$, **3.** $33 + 4\pi$, **4.** $\left[\dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{4}\right]$.

Varianta 31b

1. $y(t) = \dfrac{(t^2-t)\,e^{-3t}}{2}$, **2.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, **3.** 2, **4.** $\left[\dfrac{17}{9}, \dfrac{19}{9}\right)$.

Varianta 31c

1. $y(t) = \dfrac{(t^2-t)\,e^{t}}{2}$, **2.** $12\sqrt{38}$, **3.** $8e^2 + 6$, **4.** $(-24, 30)$.

Varianta 31d

1. $y(t) = \dfrac{t\sin t}{2} + \dfrac{3\pi\sin t}{4}$, **2.** 2, **3.** $2\pi - 1$, **4.** $[0,4]$.

Varianta 32a

1. $y(t) = \dfrac{3\,(t-4)^2\,H\,(t-4)}{2} + t + t^2$, **2.** $4\pi\sqrt{2}$, **3.** -12, **4.** $\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$.

Varianta 32b

1. $y(t) = 2\,(t-2)^2\,H\,(t-2) + \dfrac{3t^2}{2} + 2$, **2.** $20\pi\sqrt{2}$, **3.** $2\pi\sqrt{17}$, **4.** $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Varianta 32c

1. $y(t) = \dfrac{3\,(t-1)^2\,H\,(t-1)}{2} - \dfrac{t^2}{2} + 4$, **2.** $4\pi\sqrt{2}$, **3.** -12, **4.** $(-2,4)$.

Varianta 32d

1. $y(t) = \dfrac{3(t-5)^2 H(t-5)}{2} - \dfrac{t^2}{2} + t$, **2.** $156\pi\sqrt{2}$, **3.** $2\pi\sqrt{10}$, **4.** $(-5, 3)$.

Varianta 33a

1. $y(t) = \dfrac{18e^{-4t}}{17} - \dfrac{\cos t}{17} + \dfrac{4\sin t}{17}$, **2.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{8}{3}$, **3.** 250π, **4.** $\left[\dfrac{49}{25}, \dfrac{51}{25}\right)$.

Varianta 34a

1. $y(t) = \dfrac{3(t-2)^2 H(t-2)}{2} - t^2 + t$, **2.** 0, **3.** $2\sqrt{6}\pi$, **4.** $\left(-1, -\dfrac{1}{3}\right)$.

Varianta 34b

1. $y(t) = (t-5)^2 H(t-5) - \dfrac{t^2}{2} + 3t$, **2.** $\dfrac{65\sqrt{2}\pi}{4}$, **3.** 4π, **4.** $\left(-1, -\dfrac{1}{3}\right)$.