INTERPOLACE

Dana Černá

Katedra matematiky

Technická univerzita v Liberci

http://kma.fp.tul.cz

2024

Obsah

Kapitola 1

Interpolace

Interpolaci můžeme charakterizovat jako proces nahrazení dané funkce jinou funkcí, která je z určitého prostoru a nabývá v daných bodech stejných hodnot jako zadaná funkce, případně má v daných bodech také stejné hodnoty derivací. Můžeme ji také interpretovat tak, že pro $i = 0, \ldots, n$ jsou zadány body x_i a hodnoty v těchto bodech y_i a hledáme funkci určitého typu, jejíž graf prochází zadanými body $[x_i, y_i]$. V některých případech jsou navíc zadány také hodnoty derivací a potom hledáme funkci, která v daných bodech nabývá zadané funkční hodnoty a zadané hodnoty derivací. Hledaná funkce může být například polynom, spline nebo trigonometrická funkce. V této kapitole se zaměříme na interpolací funkcí jedné proměnné.

1.1 Lagrangeova interpolace

Lagrangeova interpolace je aproximace funkce pomocí polynomu, který v daných bodech nabývá stejných hodnot jako daná funkce. Uvažujme funkci f, která je definována na intervalu $[a, b]$. Mějme dáno $n + 1$ navzájem různých bodů $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ a k nim příslušné funkční hodnoty $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Body $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ se nazývají *uzly*. Polynom L stupně nejvýše n, pro který platí

$$L(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

se nazývá *Lagrangeův interpolační polynom*. Symbolem $C^k([a, b])$ budeme značit množinu všech funkcí, které jsou na intervalu $[a, b]$ spojité a na (a, b) mají spojité derivace až do řádu k. Následující věta se zabývá existencí, jednoznačností a odhadem chyby Lagrangeovy interpolace.

Věta 1. *Nechť je funkce f definována na intervalu $[a, b]$ a $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ jsou navzájem různé body. Potom existuje právě jeden polynom L stupně nejvýše n, pro který platí*

$$L(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Tento polynom lze vyjádřit ve tvaru

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i), \tag{1.3}$$

kde

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}. \tag{1.4}$$

Pokud navíc $f \in C^{n+1}([a,b])$*, potom platí*

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \tag{1.5}$$

kde

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{1.6}$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že $l_i(x_k) = 0$ pro $i \neq k$ a $l_i(x_k) = 1$, platí

$$L(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x_k) = f(x_k). \tag{1.7}$$

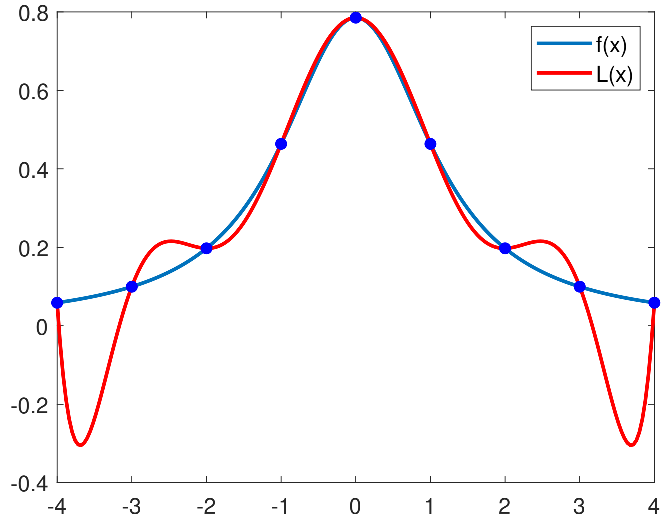
Je zřejmé, že L je polynom stupně nejvýše n. Z toho vyplývá existence Lagrangeova interpolačního polynomu a jeho tvar (1.3).
Nyní sporem ukážeme jednoznačnost. Předpokládejme, že existují dva různé Lagrangeovy polynomy L a $\tilde{L}$ splňující podmínku (1.2). Potom $P = L - \tilde{L}$ je polynom stupně nejvýše n splňující $P(x_i) = 0$ pro $i = 0, \ldots, n$. To znamená, že polynom P stupně nejvýše n má $n + 1$ různých kořenů. Tento polynom P je tedy nulový a proto $L = \tilde{L}$, což je spor.
K odhadu chybu použijeme Rolleovu větu, která říká, že pokud f je spojitá funkce, která má derivaci na (a, b) a $f(a) = f(b)$, potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.
Definujme

$$k = \frac{f(\tilde{x}) - L(\tilde{x})}{\omega_{n+1}(\tilde{x})}, \tag{1.8}$$

kde $\tilde{x} \in (a, b)$ je libovolné takové, že $\tilde{x} \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$. Dále definujme funkci

$$g(x) = f(x) - L(x) - k\,\omega_{n+1}(x). \tag{1.9}$$

Funkce g má kořeny $x_0, \ldots, x_n$ a $\tilde{x}$, tedy $n + 2$ různých kořenů. Tyto body tvoří $n + 1$ intervalů s nulovými hodnotami funkce g v krajních bodech, přičemž na každém z těchto intervalů na základě Rolleovy věty existuje bod x takový, že $g'(x) = 0$, tj. celkem $n + 1$ takových bodů. Tyto body vytváří n intervalů, přičemž na každém z intervalů je bod, kde je g'' nulová. To znamená, že v těchto n bodech je g'' nulová. Analogicky na základě



Obrázek 1.1: Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(1/(1+x^2))$ a její Lagrangeův interpolační polynom $L(x)$ pro uzly $-4, -3, \ldots, 3, 4$.

opakovaného použití Rolleovy věty zjistíme, že exituje bod ξ takový, že $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Platí tedy

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(x) - L^{(n+1)}(x) - k(\omega_{n+1}(x))^{(n+1)} = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!. \quad (1.10)$$

Použijeme vztah (1.8) pro k a po úpravě dostaneme

$$|f(\tilde{x}) - L(\tilde{x})| \leq \frac{\max\limits_{\xi \in [a,b]} |f^{n+1}(\xi)|}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(\tilde{x})|. \quad (1.11)$$

Vzhledem k tomu, že $\tilde{x}$ bylo zvoleno libovolné, vztah pro chybu je dokázán. □

Z této věty plyne, že odhad chyby interpolace (1.5) závisí na vlastnostech interpolované funkce f a také na rozložení interpolačních uzlů. Například pro ekvidistantní uzly $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$, $i = 0, \ldots, n$, funkce ω_{n+1} pro velká n v blízkosti okrajů osciluje a nabývá zde relativně velkých hodnot. Proto také interpolační polynomy vyšších stupňů na okrajích často oscilují a chyba interpolace u okrajů může být velká, viz obrázek 1.1. Tento nežádoucí jev nazýváme Rungeho jev. Z tohoto důvodu interpolace polynomem velkého stupně v některých případech není příliš vhodná.
Numerický výpočet Lagrangeova interpolačního polynomu podle Lagrangeova vzorce (1.3) se používá k odvození různých metod, například Newton-Cotesových vzorců pro numerický výpočet integrálů. K výpočtu hodnot Lagrangeova polynomu se však častěji používá Newtonův tvar Lagrangeova interpolačního polynomu, který je definován pomocí poměrných diferencí.

Pro $n+1$ různých bodů $x_0, \dots, x_n$ je *první poměrná diference* definována vzorcem

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0} \tag{1.12}$$

a *n-tá poměrná diference* je definována rekurentně vzorcem

$$f\left[x_0, \dots x_n\right] = \frac{f\left[x_1, \dots x_n\right] - f\left[x_0, \dots x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}. \tag{1.13}$$

Věta 2. *Lagrangeův interpolační polynom L lze psát v Newtonově tvaru:*

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \\ &\quad + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, \dots x_n]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Důkaz. Funkce $1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$ jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi prostoru všech polynomů stupně nejvýše n. Lagrangeův polynom stupně n pro uzly $x_0, \dots, x_n$ označme L_n. Tento polynom tedy můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} L_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \\ &= L_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.15}$$

V bodě x_n platí

$$L_n(x_n) = L_{n-1}(x_n) + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = f(x_n). \tag{1.16}$$

Z tohoto vztahu vyjádříme a_n a použijeme Lagrangeův tvar polynomu L_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{f(x_n) - L_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \\ &= \frac{f(x_n)}{\prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j)} - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n-1}(x_n - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n-1}(x_i - x_j)} \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j)} \\ &= \frac{f(x_n)}{\prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Tento vztah vynásobíme výrazem $(x_n - x_0)$:

$$\begin{aligned} a_n(x_n - x_0) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)} (x_n - x_i + x_i - x_0) \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)(x_i - x_n)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)(x_i - x_0)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)} \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n-1}(x_i - x_j)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}. \end{aligned}$$

Koeficient a_n závisí na zvolených uzlech $x_0, \ldots, x_n$, proto ho označíme $a_n(x_0, \ldots, x_n)$ a odvozený vztah přepíšeme do tvaru

$$a_n(x_0, \ldots, x_n) = \frac{a_n(x_1, \ldots, x_n) - a_n(x_0, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}. \tag{1.18}$$

Přitom pro $a_1(x_0)$ platí

$$a_1(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{1.19}$$

Porovnáním těchto vztahů s definicí poměrných diferencí zjistíme, že $a_n(x_0, \ldots, x_n) = f[x_0, \ldots, x_n]$. □

Výpočet Lagrangeova interpolačního polynomu v Newtonově tvaru vyžaduje méně operací než výpočet pomocí Lagrangeova vzorce. Chceme-li do již vypočteného interpolačního polynomu zahrnout další uzel a další funkční hodnotu, potom v Newtonově vzorci pouze přibyde další člen, zatímco výpočet podle Lagrangeova vzorce bychom museli provést celý znova.

1.2 Hermiteova interpolace

Interpolační polynom stupně $2n+1$, který v daných uzlech nabývá předepsaných funkčních hodnot a jehož první derivace také nabývá předepsaných hodnot, se nazývá *Hermiteův interpolační polynom.*

Věta 3. *Jestliže $f \in C^1([a,b])$ a $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ jsou navzájem různé body, potom existuje právě jeden polynom H stupně nejvýše $2n+1$, pro který platí*

$$H(x_i) = f(x_i), \quad H'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.20}$$

Pokud navíc $f \in C^{2n+2}([a,b])$, potom platí

$$|f(x) - H(x)| \leq \frac{\max\limits_{\xi \in [a,b]} \left|f^{(2n+2)}(\xi)\right|}{(2n+2)!} \left|\omega_{n+1}^2(x)\right|. \tag{1.21}$$

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu pro Lagrangeův interpolační polynom. □

1.3 Interpolace pomocí splinů

Spline je po částech polynomiální funkce, která má spojité derivace do určitého řádu. Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou navzájem různé body, pro které platí

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n. \tag{1.22}$$

Funkci, která je na každém intervalu $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$, polynomem stupně nejvýše k a která má v intervalu $[x_0, x_n]$ spojité derivace až do řádu $k-1$, nazýváme *(obyčejným) splinem stupně k*.
Pokud je na intervalu $[x_0, x_n]$ definována funkce f a tento spline s nabývá v uzlech $x_0, \dots, x_n$ stejných hodnot jako funkce f, potom řekneme, že spline *interpoluje* funkci f v uzlech $x_0, \dots, x_n$.
Pro danou funkci f definovanou na intervalu $[x_0, x_n]$ je tedy příslušný interpolační spline s stupně k určen podmínkami:

$$f(x_i) = s(x_i), \quad i = 0, \dots n. \tag{1.23}$$

a dále

$$s_i^{(j)}(x_i) = s_{i+1}^{(j)}(x_i), \quad j = 0, \dots k-1, \quad i = 1, \dots n-1, \tag{1.24}$$

přičemž $s_i = s|_{[x_{i-1}, x_i]}$.
Takto definovaný spline řádu k není pro danou funkci f určen jednoznaně. Spline je určen $k+1$ parametry na každém intervalu $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots n-1$, tedy celkem $n(k+1) = nk+n$ parametry. Pro interpolaci pomocí splinu máme však pouze $n+1$ podmínek na funkční hodnoty a $k(n-1)$ podmínek na spojitost a spojitost derivací, celkem tedy $nk+n-k+1$. Počet parametrů je o $k-1$ větší než počet podmínek. Spline stupně $k > 1$ tedy není určen jednoznačně a ke splinu stupně k přidáváme $k-1$ podmínek.

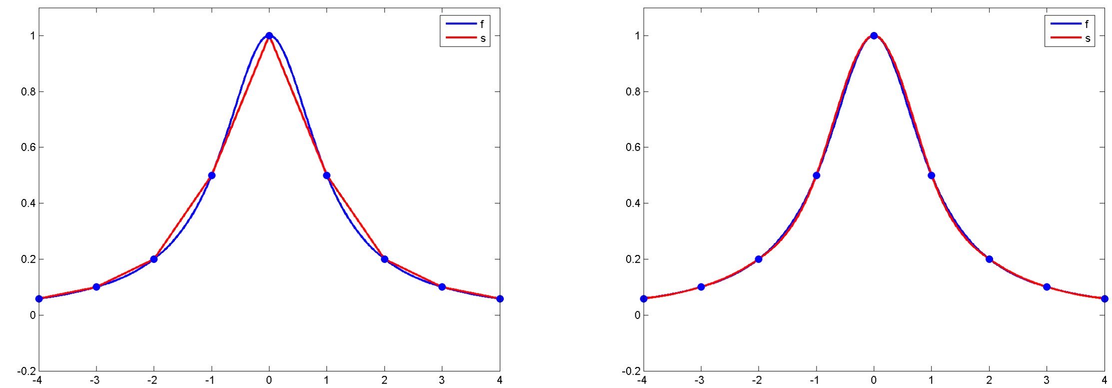
1.3.1 Konstrukce lineárního interpolačního splinu

Lineární interpolační spline interpolující danou funkci f v uzlech $x_0, \dots, x_n$, které jsou seřazeny vzestupně, je dán vztahem:

$$s(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{1.25}$$

1.3.2 Konstrukce kubického interpolačního splinu

Jedním z nejpoužívanějších splinů je *kubický spline*, což je spline třetího stupně. Jak již bylo zmíněno, spline stupně většího než jedna není určen jednoznačně. V případě kubického splinu je třeba přidat dvě podmínky. Přidáme-li podmínky $s'(x_0) = f'(x_0)$, $s'(x_n) = f'(x_n)$, dostaneme *obyčejný kubický spline*. Přidáme-li místo nich podmínky $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$, dostaneme *přirozený kubický spline*.
Spliny můžeme konstruovat přímo z podmínek na spojitost a spojitost derivací a z interpolačních podmínek, kdy tyto podmínky vyjádříme jako soustavu lineárních algebraických



Obrázek 1.2: Funkce f a příslušný lineární (vlevo) a kubický (vpravo) interpolační spline s pro uzly $-4, -3, \ldots, 3, 4$.

rovnic pro koeficienty splinu. Zde si uvedeme jinou možnost a to metodu konstrukce kubického interpolačního splinu založenou na momentech splinu. Budeme konstruovat kubický spline splňující dodatečné podmínky

$$s''(x_0) = f_0, \quad s''(x_n) = f_n, \tag{1.26}$$

kde f_0 a f_n jsou dané hodnoty.
Pro $i = 0, \ldots, n$ označme $M_i = s''(x_i)$. Tyto parametry M_i se nazývají *momenty splinu*. Dále označme $h_i = x_{i+1} - x_i$. Potom $M_0 = f_0$, $M_n = f_n$ a ostatní hodnoty M_i, $i = 1, \ldots n-1$, určíme jako řešení soustavy:

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})M_i + h_i M_{i+1} = 6\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}}\right). \tag{1.27}$$

Matice soustavy je třídiagonální, ostře diagonálně dominantní a tedy regulární. Soustava má proto právě jedno řešení a lze ji efektivně vyřešit například pomocí Gaussovy eliminace pro třídiagonální matici. Po nalezení hodnot M_i určíme spline pomocí vztahu:

$$s(x) = \frac{(x - x_i)^3}{6h_i}M_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i}M_i + (x - x_i)A_i + B_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \tag{1.28}$$

kde $i = 0, \ldots, n-1$ a

$$A_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{M_{i+1}h_i - M_i h_i}{6}, \quad B_i = f(x_i) - \frac{M_i h_i^2}{6}. \tag{1.29}$$