MATEMATIKA 3

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

KLASIFIKACE PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Uvažujme lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + F(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x,y)\,u = H(x,y)$$

pro $(x,y) \in \Omega$. Definujme diskriminant

$$D(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)\,C(x,y)\,, \quad (x,y) \in \Omega.$$

Pokud $D(x,y) < 0$, $(x,y) \in \Omega$, rovnice se nazývá eliptická.
Pokud $D(x,y) = 0$, $(x,y) \in \Omega$, rovnice se nazývá parabolická.
Pokud $D(x,y) > 0$, $(x,y) \in \Omega$, rovnice se nazývá hyperbolická.

Poissonova rovnice má tvar

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Diskriminant $D(x, y) = 0 - 4(-1)(-1) = -4$, $(x, y) \in \Omega$.
Poissonova rovnice je eliptická.

Rovnice vedení tepla má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, T).$$

Diskriminant $D(x, t) = 0 - 4 \cdot 0(-1) = 0$, $(x, t) \in (a, b) \times (0, T)$.
Rovnice vedení tepla je parabolická.

Vlnová rovnice má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, T)\,.$$

Diskriminant $D\,(x, t) = 0 - 4 \cdot 1\,(-1) = 4$, $(x, t) \in (a, b) \times (0, T)$.
Vlnová rovnice je hyperbolická.

METODA SÍTÍ PRO ELIPTICKÉ ROVNICE

Budeme řešit Poissonovu rovnici

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ na } \Omega, \\ u &= g \text{ na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\partial\Omega$ označuje hranici množiny a Δu je Laplaceův operátor

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

O oblasti Ω budeme předpokládat, že je omezená a lipschitzovská (hranice je po částech hladká, bez špiček). Označme $\overline{\Omega}$ uzávěr množiny Ω. Pokud $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ a $g \in C^1\left(\partial\Omega\right)$, potom má daná úloha právě jedno klasické řešení, tj. $u \in C^2\left(\Omega\right) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ splňující rovnici a okrajové podmínky.

Zvolme krok $h > 0$. Zvolme $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ a definujme body $P_{ij} = (x_i, y_j)$, kde $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jh$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Označme $S = \{P_{ij}, i, j \in \mathbb{Z}\}$, síť na množině Ω je potom definována jako $P = S \cap \bar{\Omega}$. Prvky množiny P nazýváme uzly.

Rozlišujeme uzly

- regulární - uzly, pro které úsečka $\overline{P_{i-1,j}P_{i+1,j}}$ a úsečka $\overline{P_{i,j-1}P_{i,j+1}}$ patří do $\overline{\Omega}$
- hraniční - uzly $P_{ij} \in \partial\Omega$
- neregulární - uzly, které nejsou regulární ani hraniční

Budeme uvažovat takovou síť, která obsahuje pouze regulární a hraniční uzly.

Označme U_{ij} hodnotu přibližného řešení v uzlu P_{ij}. Derivace v regulárních uzlech nahradíme diferencemi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_{ij}) &= \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_{ij}) &= \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2},\end{aligned}$$

a hodnoty v hraničních uzlech určíme pomocí okrajové podmínky

$$U_{i,j} = g\left(P_{i,j}\right).$$

Dostaneme soustavu

$$-\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j},$$

kde $f_{i,j} = f\left(P_{i,j}\right)$.

Po úpravě dostaneme pětibodové schéma

$$4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1} = h^2 f_{i,j}.$$

Matice soustavy má maximálně pět nenulových prvků v řádku, je tedy řídká. Lze ukázat, že je regulární, symetrická a pozitivně definitní. Soustavu můžeme efektivně řešit například metodou sdružených gradientů.

ŘEŠENÍ PARABOLICKÝCH ROVNIC

Budeme řešit rovnici vedení tepla

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in (a,b) \times (0,T), \\
u(x,0) &= g(x), x \in [a,b], \\
u(a,t) &= A(t), t \in [0,T], \\
u(b,t) &= B(t), t \in [0,T].
\end{aligned}
$$

Předpokládejme, že jsou splněny podmínky konzistence:
$g(a) = A(0)$ a $g(b) = B(0)$.

Rozdělme interval $[a, b]$ na N podintervalů délky $h = \frac{b-a}{N}$, h se nazývá prostorový krok. Definujme $x_k = a + kh$, $k = 0, \dots, N$.

Rozdělme interval $[0, T]$ na M podintervalů délky $\tau = \frac{T}{M}$, τ se nazývá časový krok. Definujme $t_l = l\tau$, $l = 0, \dots, M$.

Síť je tvořena uzly $P_{k,l} = (x_k, t_l)$. Hodnotu přibližného řešení v uzlu $P_{k,l}$ označíme $U_{k,l}$.

1. Explicitní schéma

Časovou derivaci nahradíme dopředními diferencemi a také druhou derivaci nahradíme diferencemi. Pomocí okrajových podmínek určíme hodnoty v uzlech ležících na části hranice, kde jsou okrajové podmínky předepsány. Dostaneme

$$\frac{U_{k,l+1} - U_{k,l}}{\tau} = \frac{U_{k+1,l} - 2U_{k,l} + U_{k-1,l}}{h^2},$$

$$U_{k,0} = g\left(x_k\right), \; U_{0,l} = A\left(t_l\right), \; U_{N,l} = B\left(t_l\right).$$

Pro $u \in C^4\left([a, b] \times [0, T]\right)$ je chyba diskretizace řádu $\mathcal{O}\left(\tau + h^2\right)$.

Toto schéma je stabilní, pokud $\tau \leq \frac{h^2}{2}$, je tedy podmíněně stabilní.

Postup: Určíme hodnoty $U_{0,l}$, $l = 0, \ldots, M$, potom $U_{1,l}$, $l = 0, \ldots, M$, potom $U_{2,l}$, $l = 0, \ldots, M$, atd.

Pokud bychom nahradili časovou derivaci zpětnou diferencí, dostali bychom implicitní schéma, které je stabilní, ale chyba je pouze řádu $\mathcal{O}\left(\tau + h^2\right)$.

Pokud bychom nahradili časovou derivaci centrální diferencí, dostali bychom explicitní schéma s chybou řádu $\mathcal{O}\left(\tau^2 + h^2\right)$, které je absolutně nestabilní.

2. Crankovo-Nicolsonové schéma

$$\frac{U_{k,l} - U_{k,l-1}}{\tau} = \frac{U_{k+1,l} - 2U_{k,l} + U_{k-1,l}}{2h^2} + \frac{U_{k+1,l-1} - 2U_{k,l-1} + U_{k-1,l-1}}{2h^2},$$

$$U_{k,0} = g\left(x_k\right), \; U_{0,l} = A\left(t_l\right), \; U_{N,l} = B\left(t_l\right).$$

Metoda je implicitní, na každé časové vrstvě řešíme soustavu s třídiagonální maticí.
Pro $u \in C^4\left([a, b] \times [0, T]\right)$ je chyba diskretizace řádu $\mathcal{O}\left(\tau^2 + h^2\right)$.
Metoda je absolutně stabilní.

3. Metoda přímek

Označme $u_k(t) = u(x_k, t)$. Dosadíme do rovnice a nahradíme derivace druhého řádu diferencemi. Dostaneme

$$u_k'(t) = \frac{u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2},$$

$$u_k(0) = g(x_k), \; u_0(t) = A(t), \; u_N(t) = B(t).$$

Dostali jsme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s počátečními podmínkami.

4. Rotheova metoda

Označme $u_l(x) = u(x, t_l)$. Dosadíme do rovnice a nahradíme časové derivace dopředními diferencemi. Dostaneme

$$\frac{u_{l+1}(x) - u_l(x)}{\tau} = u''_{l+1}(x),$$

$$u_0(x) = g(x), \; u_l(a) = A(t_l), \; u_l(b) = B(t_l).$$

Na každé časové vrstvě řešíme obyčejnou diferenciální rovnici s okrajovými podmínkami.