

MATEMATIKA 3

Dana Černá

<http://www.fp.tul.cz/kmd/>

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

ŘEŠENÍ SOUSTAV S OBDÉLNÍKOVOU MATICÍ

Uvažujme soustavu m rovnic s n neznámými:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Definujme matice:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{A_b} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **matice soustavy**, matice $\mathbf{A_b}$ se nazývá **rozšířená matice soustavy**. Vektor $\mathbf{b}$ se nazývá **vektor pravé strany**.

Symbolem $h(\mathbf{M})$ budeme značit **hodnost matice $\mathbf{M}$** , tj. počet lineárně nezávislých řádků matice $\mathbf{M}$.

Matice $\mathbf{M}$ se nazývá **ortonormální**, jestliže

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{I},$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice.

FROBENIOVA VĚTA:

Uvažujme soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s maticí $\mathbf{A}$ o rozměrech $m \times n$. Platí

- 1) Je-li $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}_b)$, potom soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nemá řešení.
- 2) Je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_b)$ a $h(\mathbf{A}) = n$, potom soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení.
- 3) Je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_b)$ a $h(\mathbf{A}) < n$, potom soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má nekonečně mnoho řešení.

Řekneme, že matice $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je **pseudoinverzní matice** k matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, jestliže platí:

a) $\mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,

b) $\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$,

c) $(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}$,

d) $(\mathbf{A} \mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^+$.

VĚTA:

- 1) Jestliže soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má nekonečně mnoho řešení, potom $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ je řešení s nejmenší Euklidovskou normou.
- 2) Jestliže soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení, potom $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ je řešení soustavy.
- 3) Jestliže soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nemá řešení, potom $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ je tzv. nejlepší řešení ve smyslu nejmenších čtverců, tj. platí

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{Ay}\|_2, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Číslo podmíněnosti matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je definováno

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^+\|. \quad (1)$$

METODY ŘEŠENÍ SOUSTAV S OBDÉLNÍKOVOU MATICÍ

- Řešení pomocí soustavy normálních rovnic
- Singulární rozklad matice

1. SOUSTAVA NORMÁLNÍCH ROVNIC

VĚTA: Uvažujme soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s maticí $\mathbf{A}$ o rozměrech $m \times n$. Předpokládejme, že $m > n$ a $h(\mathbf{A}) = n$. Potom soustava

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

má právě jedno řešení $\mathbf{x}^*$ a toto řešení $\mathbf{x}^*$ je řešením soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ve smyslu nejmenších čtverců.

Soustava $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ se nazývá **soustava normálních rovnic**.

Pokud n je výrazně menší než m , potom je soustava normálních rovnic výrazně menší než původní soustava.

Matice normální soustavy je symetrická pozitivně definitní a k jejímu řešení je tedy vhodné použít Choleského rozklad.

Číslo podmíněnosti matice soustavy normálních rovnic je rovna kvadrátu čísla podmíněnosti matice původní soustavy:

$$\kappa \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \right) = \kappa^2 \left(\mathbf{A} \right).$$

Pro soustavy se špatně podmíněnou maticí je tedy řešení soustavy normálních rovnic špatně podmíněný problém.

Pseudoinverzní matici lze tedy vypočítat pomocí vztahu:

$$\mathbf{A}^+ = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T.$$

2. SINGULÁRNÍ ROZKLAD

VĚTA: Každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lze rozložit na součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T,$$

kde $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ortonormální matice a matice $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je diagonální,

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k), \quad k = \min(m, n),$$

jejíž diagonální prvky splňují

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_k = 0,$$

kde $r = h(\mathbf{A})$.

Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, kde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prvky $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ se nazývají **singulární čísla** matice **A**.

i -tý sloupec matice **U** značíme $\mathbf{u}_i$ a nazýváme i -tý **levý singulární vektor**.

i -tý sloupec matice **V** značíme $\mathbf{v}_i$ a nazýváme i -tý **pravý singulární vektor**.

Zřejmě platí

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} = \sigma_i \mathbf{v}_i^T, \quad \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ jsou nenulová vlastní čísla matice $A^T A \Leftrightarrow$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ jsou nenulová vlastní čísla matice $AA^T \Leftrightarrow$
 $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ jsou nenulová singulární čísla matice $\mathbf{A}$.

Vektory $\mathbf{u}_i$ jsou normované vlastní vektory matice AA^T .

Vektory $\mathbf{v}_i$ jsou normované vlastní vektory matice $A^T A$.

UŽITÍ SINGULÁRNÍHO ROZKLADU:

1. Výpočet pseudoinverzní matice:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T,$$

kde $\mathbf{\Sigma}^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je diagonální matice

$$\mathbf{\Sigma}^+ = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0 \right).$$

2. Výpočet hodnoty matice: hodnota matice je rovna počtu nenulových singulárních čísel.

3. Určení spektrální normy matice:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1,$$

tedy spektrální norma matice je rovna maximálnímu singulárnímu číslu.

4. Výpočet podmíněnosti matice vzhledem ke spektrální normě:

$$\text{cond}\mathbf{A} = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}.$$

5. Výpočet báze nulového prostoru matice **A**: Vektory $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_k$ tvoří bázi nulového prostoru matice **A**, singulární rozklad lze tedy použít pro výpočet řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic.

6. Výpočet báze oboru hodnot matice **A**: Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ tvoří bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ takové, že } \mathbf{Ax} = \mathbf{y}\}.$