# MATEMATIKA 3

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

## INTERPOLACE

Úloha: Určete funkci, která nabývá v daných bodech $x_0, \ldots, x_n$, předepsané hodnoty $f(x_0), \ldots, f(x_n)$, případně předepsané hodnoty derivací $f'(x_0), \ldots, f'(x_n)$.

Interpolace je aproximace funkce jinou funkcí, která v daných bodech nabývá předepsaných hodnot, případně předepsaných hodnot derivací.

Body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se nazývají uzly.

- Lagrangeova interpolace
- Hermiteova interpolace
- Interpolace pomocí splinů

## 1. LAGRANGEOVA INTERPOLACE

Lagrangeova interpolace je aproximace funkce pomocí polynomu, který v daných bodech nabývá předepsaných hodnot.

Uvažujme funkci $f$, která je definována na intervalu $[a, b]$. Mějme dáno $n+1$ navzájem různých bodů $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ a k nim příslušné funkční hodnoty $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

Polynom $P$ stupně nejvýše $n$, pro který platí

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

se nazývá Lagrangeův interpolační polynom.

VĚTA: Nechť je funkce $f$ definována na intervalu $[a, b]$ a nechť $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ jsou navzájem různé body. Potom existuje právě jeden polynom stupně nejvýše $n$, pro který platí

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

Tento polynom lze vyjádřit v tzv. Lagrangeově tvaru

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i),$$

kde

$$l_i(x) = \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}.$$

Odhad chyby:

Pokud navíc $f \in C^{n+1}([a,b])$, potom platí

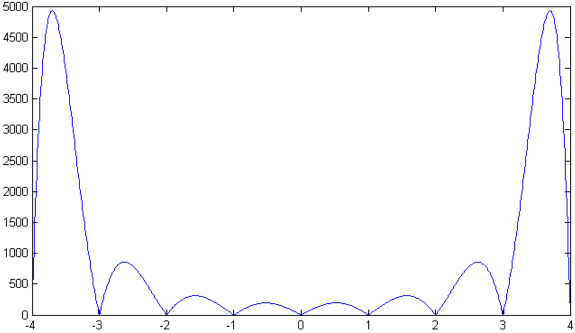
$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\max\limits_{y\in[a,b]} \left|f^{n+1}(y)\right|}{(n+1)!} \left|\omega_{n+1}(x)\right|, \; x \in [a,b],$$

kde

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

$C^{n+1}([a,b])$ označuje množinu všech funkcí definovaných na intervalu $[a,b]$, které mají spojité parciální derivace až do řádu $n+1$.

Graf funkce $|\omega_9(x)|$ pro uzly $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

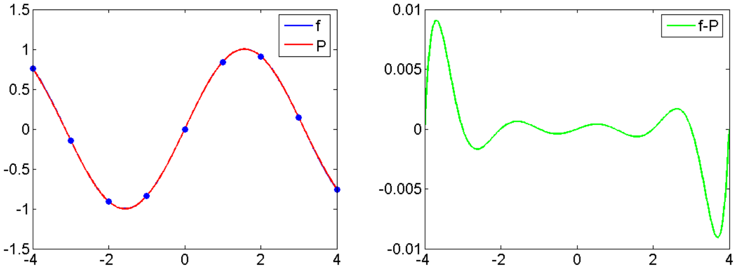


Odhad chyby interpolace závisí na vlastnostech interpolované funkce $f$ a také na rozložení interpolačních uzlů.

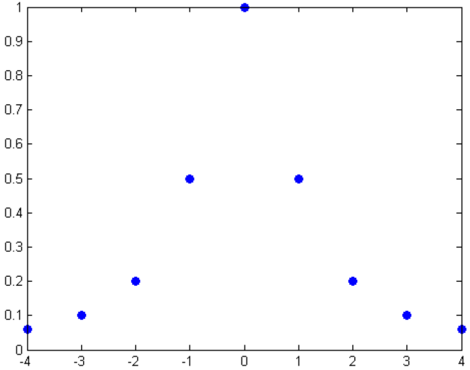
Například pro ekvidistantní uzly $x_i = a + ih$, $h = (b - a)/n$, $i = 0, \ldots, n$, se funkce $\omega_{n+1}$ pro velká $n$ v blízkosti okrajů velmi mění a nabývá zde velkých hodnot.

Interpolační polynomy vyšších stupňů často zejména na okrajích oscilují. Tomu říkáme Rungeho jev. Proto interpolace polynomem velkého stupně většinou není příliš vhodná.

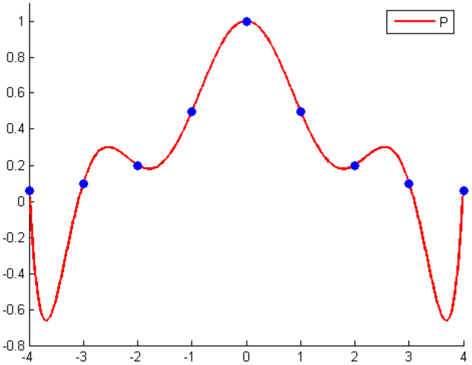
PŘÍKLAD: Funkce $f(x) = \sin x$ a její Lagrangeův interpolační polynom $P$ pro uzly $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.



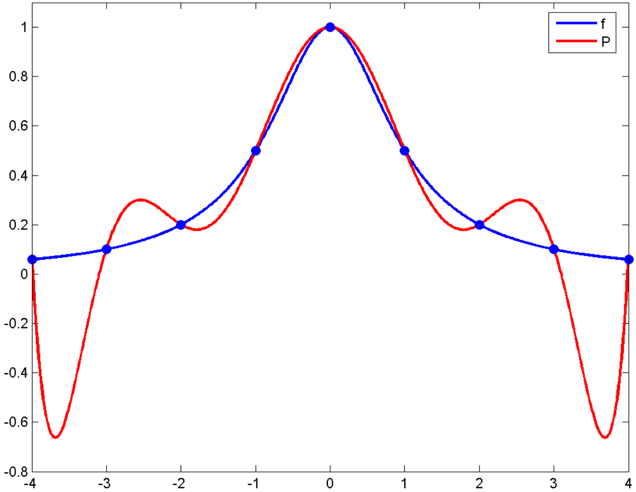
PŘÍKLAD: Určete Lagrangeův interpolační polynom, jehož graf prochází body $[-4, 1/17]$, $[-3, 1/10]$, $[-2, 1/5]$, $[-1, 1/2]$, $[0, 1]$, $[1, 1/2]$, $[2, 1/5]$, $[3, 1/10]$, $[4, 1/17]$.



# Lagrangeův interpolační polynom



Funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a její Lagrangeův interpolační polynom



## Newtonův tvar Lagrangeova interpolačního polynomu

Pro $n+1$ různých bodů $x_0, \ldots, x_n$ je první poměrná diference definována vzorcem

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}$$

a n-tá poměrná diference je definována rekurentně vzorcem

$$f\left[x_0, \ldots x_n\right] = \frac{f\left[x_1, \ldots x_n\right] - f\left[x_0, \ldots x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}.$$

Lagrangeův interpolační polynom lze psát v Newtonově tvaru:

$$\begin{aligned} P(x) \quad = \quad & f\left(x_0\right) + \left(x - x_0\right) f\left[x_0, x_1\right] + \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) f\left[x_0, x_1, x_2\right] + \\ & + \ldots + \left(x - x_0\right) \ldots \left(x - x_{n-1}\right) f\left[x_0, \ldots x_n\right]. \end{aligned}$$

Tento způsob vyžaduje méně operací než výpočet pomocí Lagrangeova vzorce.

Chceme-li do již vypočteného interpolačního polynomu zahrnout další uzel a další funkční hodnotu, potom v Newtonově vzorci pouze přibude další člen.

## 2. HERMITEOVA INTERPOLACE

Interpolační polynom stupně $2n+1$, který v daných uzlech nabývá předepsaných funkčních hodnot a jehož první derivace nabývá předepsaných hodnot, se nazývá Hermiteův interpolační polynom.

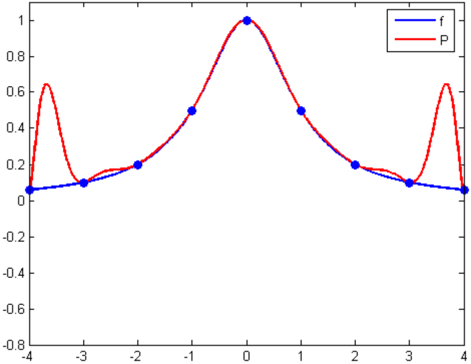
VĚTA: Nechť je funkce $f$ definována a diferencovatelná na intervalu $[a,b]$ a nechť $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ jsou navzájem různé body. Potom existuje právě jeden polynom stupně nejvýše $2n+1$, pro který platí

$$P(x_i) = f(x_i), \quad P'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pokud navíc $f \in C^{2n+2}([a,b])$, potom platí

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\max\limits_{y\in[a,b]} \left| f^{2n+2}(y) \right|}{(2n+2)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$

PŘÍKLAD: Určete Hermiteův interpolační polynom funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pro uzly $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.



## 3. INTERPOLACE POMOCÍ SPLINŮ

Spline je po částech polynomiální funkce, která má spojité derivace do určitého řádu.

Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ jsou navzájem různé body, pro které platí

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n.$$

Funkci, která je na každém intervalu $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$, polynomem stupně nejvýše $k$ a která má v intervalu $[x_0, x_n]$ spojité derivace až do řádu $k - 1$, nazýváme (obyčejným) splinem řádu $k$.

Pro danou funkci $f$ definovanou na intervalu $[x_0, x_n]$ je příslušný interpolační spline $s$ řádu $k$ určen podmínkami:

$$f(x_i) = s(x_i), \quad i = 0, \dots n,$$

a

$$s_i^{(j)}(x_i) = s_{i+1}^{(j)}(x_i), \quad j = 0, \dots k-1, \quad i = 1, \dots n-1,$$

kde $s_i = s|_{[x_{i-1}, x_i]}$.

Takto definovaný spline řádu $k$ pro danou funkci $f$ není určen jednoznačně. Spline je určen $k+1$ parametry na každém intervalu $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots n-1$, tedy celkem $n(k+1)$ parametry. Pro interpolaci pomocí splinu máme však pouze $n+1$ podmínek na funkční hodnoty a $k(n-1)$ podmínek na spojitost a spojitost derivací, chybí $k-1$ podmínek.

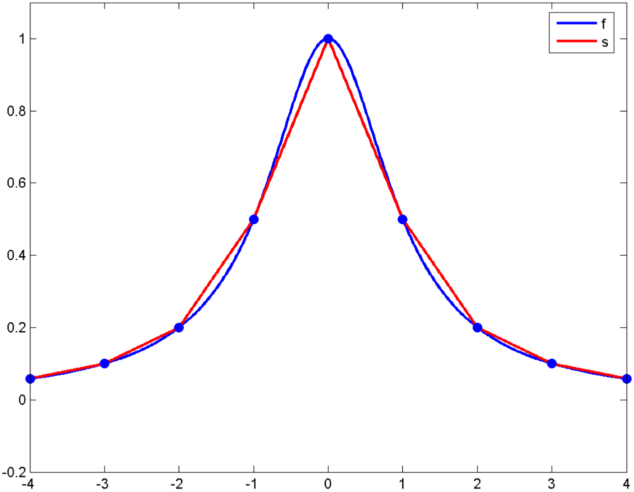
## Konstrukce lineárního interpolačního splinu

Lineární interpolační spline interpolující danou funkci $f$ uzlech $x_0, \ldots, x_n$, které jsou seřazeny vzestupně, je dán vztahem:

$$s(x) = f(x_i) + (x - x_i)\,\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$

kde $x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, n-1.$

PŘÍKLAD: Určete lineární interpolační spline, jehož graf prochází body $[-4, 1/17]$, $[-3, 1/10]$, $[-2, 1/5]$, $[-1, 1/2]$, $[0, 1]$, $[1, 1/2]$, $[2, 1/5]$, $[3, 1/10]$, $[4, 1/17]$.



## Kubický spline

Kubický spline je spline třetího řádu.

Přidáme-li podmínky $s'(x_0) = f'(x_0)$, $s'(x_n) = f'(x_n)$, dostaneme obyčejný kubický spline.

Přidáme-li místo nich podmínky $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$, dostaneme přirozený kubický spline.

## Konstrukce kubického interpolačního splinu

Budeme konstruovat kubický spline splňující podmínku

$$s''(x_0) = f_0, \quad s''(x_n) = f_n,$$

kde $f_0$ a $f_n$ jsou dané hodnoty.

Označme $M_i = s''(x_i)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n$.
Potom $M_0 = f_0$, $M_n = f_n$ a ostatní hodnoty $M_i$ určíme řešením soustavy:

$$h_{i-1} M_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1}) M_i + h_i M_{i+1} =$$

$$= 6 \left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}} \right),$$

kde $i = 1, \ldots n-1$.

Matice soustavy je třídiagonální, ostře diagonálně dominantní a regulární.

Po nalezení hodnot $M_i$ určíme spline pomocí vztahu:

$$s(x) = \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} M_i + (x - x_i) A_i + B_i,$$

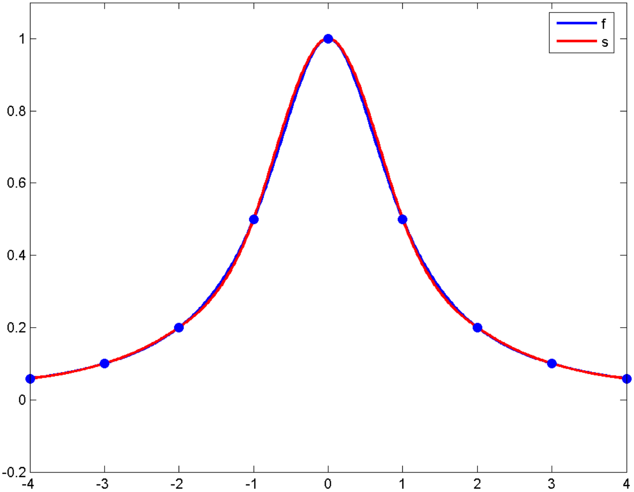
kde $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$,

$$A_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{M_{i+1} h_i - M_i h_i}{6}$$

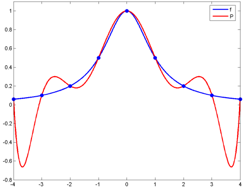
a

$$B_i = f(x_i) - \frac{M_i h_i^2}{6}.$$

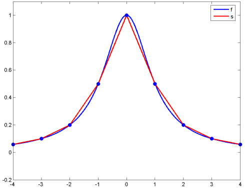
PŘÍKLAD: Určete kubický interpolační spline, jehož graf prochází body $[-4, 1/17]$, $[-3, 1/10]$, $[-2, 1/5]$, $[-1, 1/2]$, $[0, 1]$, $[1, 1/2]$, $[2, 1/5]$, $[3, 1/10]$, $[4, 1/17]$.



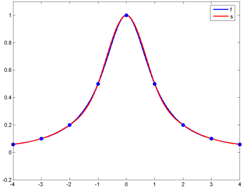
Lagrangeův polynom




lineární spline




kubický spline



VĚTA: Jestliže $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, $f \in C^4([x_0, x_n])$ a $\left|f^4(x)\right| < K$ pro $x \in [a, b]$. Potom pro kubický spline $s$ interpolující funkci $f$ v uzlech $x_0, \ldots, x_n$, který splňuje $s'(x_0) = f'(x_0)$, $s'(x_n) = f'(x_n)$, platí

$$s \to f, \quad s' \to f', \quad s'' \to f'', \quad s''' \to f''',$$

pro $h = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}| \to 0$.