MATEMATIKA 3

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

NUMERICKÁ INTEGRACE

Úloha: Vypočtěte

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Metody výpočtu:

- Výpočet pomocí primitivní funkce k funkci f (symbolický výpočet)
- Výpočet pomocí Taylorovy řady funkce f
- Numerická integrace

Numerická integrace funkce jedné proměnné se také nazývá kvadratura. Numerická integrace funkce více proměnných se také nazývá kubatura.

NUMERICKÁ INTEGRACE

Daný integrál budeme počítat přibližně pomocí součtu:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

kde $x_i \in [a, b]$ se nazývají uzly, $w_i \in \mathbb{R}$ se nazývají váhy.

Výraz na pravé straně se nazývá kvadraturní vzorec, označíme $Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$.

Chybu budeme definovat předpisem $E_n(f) = I(f) - Q_n(f)$.

Řekneme, že kvadraturní vzorec $Q_n(f)$ je řádu k, jestliže platí

$$E_n(P(x)) = 0,$$

pro všechny polynomy P stupně nejvýše k.

(JEDNODUCHÉ) NEWTON-COTESOVY VZORCE

Definujme krok metody $h = (b-a)/n$. Budeme uvažovat ekvidistantní uzly $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$, nebo $x_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) h$, $i = 1, \ldots, n$. Potom

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b P_n(x)\, dx,$$

kde P_n je Lagrangeův interpolační polynom stupně n pro funkci f a dané uzly.

Tento polynom lze vyjádřit v tzv. Lagrangeově tvaru

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, f(x_i),$$

kde

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}.$$

Platí

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \int_a^b P_n(x)\,dx\\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, f(x_i)\,dx\\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,dx.\end{aligned}$$

Newtonovy-Cotesovy vzorce mají tvar

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)\,, \quad \text{kde } w_i = \int_a^b l_i(x)\,dx.$$

Newton-Cotesovy vzorce mají pro danou volbu ekvidistantních uzlů maximální řád.

Při interpolaci polynomy vyšších stupňů může dojít k velkým chybám na okrajích intervalu, proto se Newton-Cotesovy vzorců vyšších řádů příliš nepoužívají.

Pro konkrétní volbu stupně Lagrangeova interpolačního polynomu a volbu uzlů dostaneme konkrétní metodu:

- $n = 0$ Obdélníkové pravidlo
- $n = 1$ Lichoběžníkové pravidlo
- $n = 2$ Simpsonovo pravidlo (Simpsonovo $1/3$ pravidlo)
- $n = 3$ Simpsonovo $3/8$ pravidlo

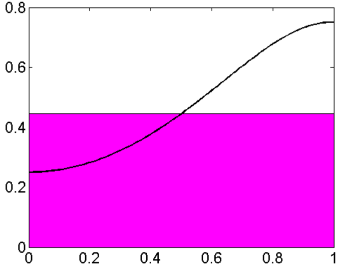
1. OBDÉLNÍKOVÉ PRAVIDLO

Pro $n = 0$ a $x_0 = \frac{a+b}{2}$ má Lagrangeův interpolační polynom tvar

$$P_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

z toho odvodíme kvadraturní vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$



Je-li $f \in C^2([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že pro chybu platí

$$E_0(f) = \int_a^b f(x) - P_0(x)\, dx = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24}(b-a)^3 .$$

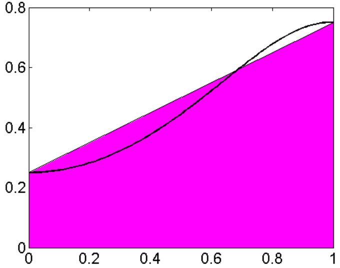
2. LICHOBĚŽNÍKOVÉ PRAVIDLO

Pro $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, má Lagrangeův interpolační polynom tvar

$$P_1(x) = f(a)\frac{(x-b)}{(a-b)} + f(b)\frac{(x-a)}{(b-a)},$$

z toho odvodíme kvadraturní vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_1(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$



Je-li $f \in C^2([a,b])$, potom existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že pro chybu platí

$$E_1(f) = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)^3 .$$

3. SIMPSONOVO PRAVIDLO

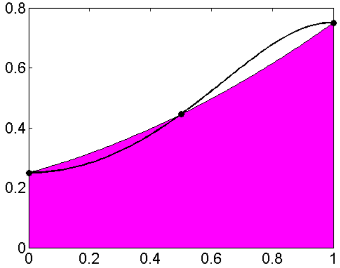
Pro $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, má Lagrangeův interpolační polynom tvar

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

z toho odvodíme kvadraturní vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right),$$

kde $h = (b-a)/2$ je vzdálenost mezi uzly.



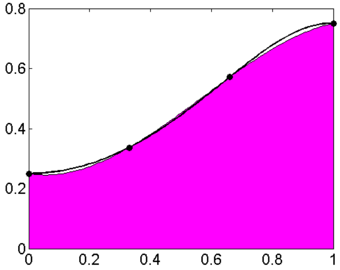
Je-li $f \in C^4([a,b])$, potom existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že pro chybu platí

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5.$$

4. SIMPSONOVO 3/8 PRAVIDLO

Pro $n = 3$, $h = \frac{b-a}{3}$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $x_3 = b$, dostaneme kvadraturní vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right),$$



Je-li $f \in C^4([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že pro chybu platí

$$E_3(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80} h^5.$$

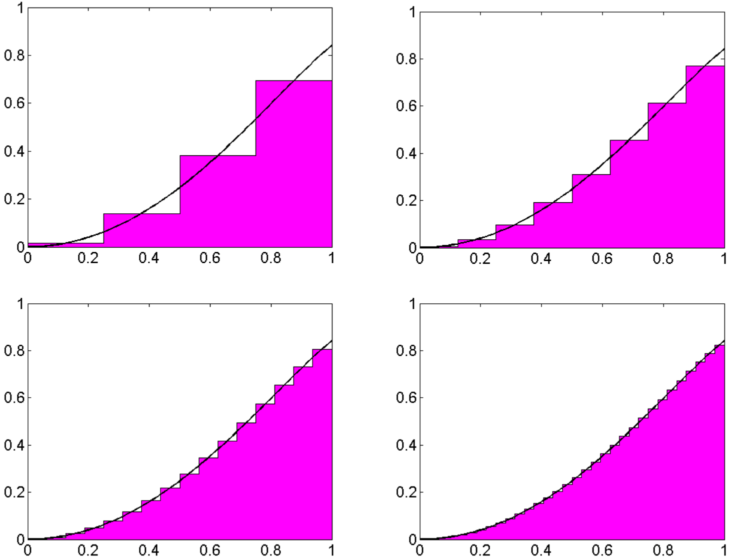
1. (SLOŽENÉ) OBDÉLNÍKOVÉ PRAVIDLO

Rozdělíme interval $[a, b]$ na m podintervalů stejné délky $h = \frac{b-a}{m}$, označíme středy podintervalů $x_1, \ldots, x_m$, tj. $x_i = a + (i - 1/2)\, h$, a na každém podintervalu použijeme obdélníkové pravidlo, dostaneme tzv. složené obdélníkové pravidlo

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h \sum_{i=1}^{m} f(x_i),$$

Je-li $f \in C^2([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že pro chybu platí

$$E_m(f) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24} (b - a)\, h^2.$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

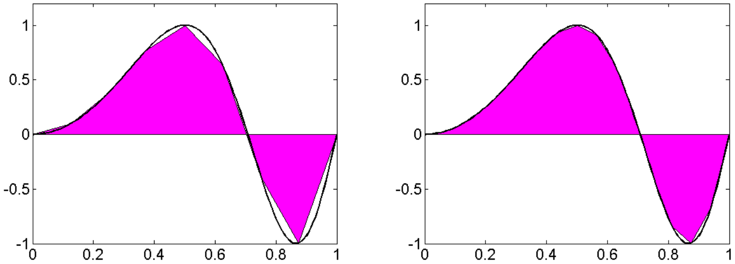
2. (SLOŽENÉ) LICHOBĚŽNÍKOVÉ PRAVIDLO

Rozdělíme interval $[a, b]$ na m podintervalů stejné délky $h = \frac{b-a}{m}$, označíme $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, m$ a na každém podintervalu použijeme lichoběžníkové pravidlo, dostaneme tzv. složené lichoběžníkové pravidlo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2}\right)$$

Je-li $f \in C^2([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že pro chybu platí

$$E_m(f) = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)h^2.$$


1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

3. (SLOŽENÉ) SIMPSONOVO PRAVIDLO

Rozdělíme interval $[a, b]$ na m podintervalů stejné délky $h = \frac{b-a}{m}$, m je sudé, označíme $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, m$ a na každém podintervalu $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ použijeme jednoduché Simpsonovo pravidlo, dostaneme tzv. složené Simpsonovo pravidlo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_1) + \ldots + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)\right)$$

Je-li $f \in C^4([a, b])$, potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že pro chybu platí

$$E_m(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)\,h^4.$$

4. (SLOŽENÉ) SIMPSONOVO 3/8 PRAVIDLO

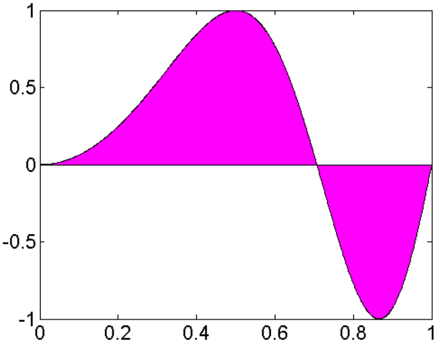
Rozdělíme interval $[a, b]$ na m podintervalů stejné délky $h = \frac{b-a}{m}$, m je dělitelné 3, označíme $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, m$ a na každém podintervalu $[x_{3i}, x_{3i+3}]$ použijeme jednoduché Simpsonovo 3/8 pravidlo, dostaneme tzv. složené Simpsonovo 3/8 pravidlo

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + f(x_m) + 3\sum_{k=1}^{m/3}(f(x_{3k-1}) + f(x_{3k-2})) + 2\sum_{k=1}^{m/3-1} f(x_{3k})\right]$$

Je-li $f \in C^4([a, b])$, potom pro chybu platí

$$E_m(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}(b-a)h^4.$$

PŘÍKLAD: Vypočtěte $\int_0^1 \sin\left(2\pi x^2\right)$.



m	obdélníkové	lichoběžníkové	Simpsonovo
16	**0.1**6962518890597	**0.17**584107153707	**0.171**52825575011
32	**0.171**19420389884	**0.17**273313022152	**0.171**69714978300
64	**0.171**57986357475	**0.171**96366706018	**0.17170**717933974
128	**0.171**67587226279	**0.1717**7176531747	**0.17170**779806989
256	**0.171**69984913705	**0.1717**2381879013	**0.17170783**661435
512	**0.17170**584177594	**0.1717**1183396359	**0.171707839**02141
1024	**0.17170**733983695	**0.17170**883786976	**0.1717078391**7182
2048	**0.17170**771434604	**0.17170**808885336	**0.17170783918**122