MATEMATIKA 3

Dana Černá

https://kmd.fp.tul.cz

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ODR S POČÁTEČNÍMI PODMÍNKAMI

Zkratka ODR znamená obyčejná diferenciální rovnice.

Úloha: Určete řešení soustavy ODR prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ &\ldots \\ y_m' &= f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \end{aligned} \tag{1}$$

na intervalu $[a, b]$ s počátečními podmínkami

$$y_1(a) = p_1, y_2(a) = p_2, \ldots, y_m(a) = p_m. \tag{2}$$

Řekneme, že reálné funkce jedné proměnné $y_1, y_2, \ldots, y_m$ jsou na $[a, b]$ řešením soustavy (1) s podmínkami (2), jestliže jsou spojité na $[a, b]$, mají spojité derivace na (a, b), splňují soustavu (1) na (a, b) a podmínky (2).

Danou soustavu s počátečními podmínkami můžeme zapsat také vektorově:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}\right) \text{ pro } x \in [a, b], \quad \mathbf{y}\left(a\right) = \mathbf{p}.$$

Pro $m = 1$ dostáváme jednu obyčejnou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y' = f\left(x, y\right) \text{ pro } x \in [a, b], \quad y\left(a\right) = p.$$

Úmluva: Budeme metody formulovat pro jednu diferenciální rovnici, pro soustavu platí analogicky.

PŘÍKLAD: Určete řešení rovnice $y' = y^2$ na intervalu $[0, 2]$, $y(0) = 1$.

Metodou separace proměnných dostaneme $y = \frac{1}{1-x}$. Tato funkce není definována v bodě 1. Na intervalu $[0, 2]$ rovnice nemá řešení.

PŘÍKLAD: Určete řešení rovnice $y' = \sqrt{y}$ na intervalu $[0, 1]$, $y(0) = 0$.

Daná rovnice má dvě řešení $y = 0$ a $y = \frac{x^2}{4}$.

Řešení dané úlohy nemusí existovat nebo nemusí být určeno jednoznačně.

Postačující podmínka existence a jednoznačnosti řešení

VĚTA: Jestliže jsou funkce $f_1, f_2, \ldots, f_m$, spojité na $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ a mají na tomto intervalu spojité a omezené parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \ldots, m$, potom existuje právě jedno řešení $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ soustavy (1) s počáteční podmínkou (2).

ODR m-tého řádu

$$y^{(m)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}\right)$$

s počátečními podmínkami

$$y\left(a\right) = p_1, y'\left(a\right) = p_2, \ldots, y^{(m-1)}\left(a\right) = p_m,$$

lze pomocí substituce

$$y_1 = y, y_2 = y', \ldots, y_m = y^{(m-1)},$$

převést na soustavu ODR prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_m' &= f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m\right), \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$y_1\left(a\right) = p_1, y_2\left(a\right) = p_2, \ldots, y_m\left(a\right) = p_m.$$

JEDNOKROKOVÉ METODY

Úloha: Určete řešení soustavy ODR $y' = f(x, y)$, $x \in [a, b]$, $y(a) = p$.

Rozdělme interval $[a, b]$ na N podintervalů délky $h = \frac{b-a}{N}$, h se nazývá integrační krok metody. Krajní body podintervalů se nazývají uzly metody. Označíme je $x_n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$. Budeme hledat hodnoty přibližného řešení v uzlech, přibližnou hodnotu řešení v uzlu x_n označíme y_n.
Jednokrokové metody mají předpis:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad y_0 = p.$$

Funkce Φ se nazývá přírůstková funkce.

Přesné řešení dané úlohy označme y^*.

$e_n(h) = y_n - y^*(x_n)$ se nazývá celková diskretizační chyba.

$\delta_n(h) = \frac{y^*(x_{n+1}) - y^*(x_n)}{h} - \Phi(x_n, y^*(x_n), h)$ se nazývá lokální relativní diskretizační chyba.

Řekneme, že metoda je p-tého řádu, jestliže $|\delta_n(h)| \leq Ch^p$, kde C je konstanta nezávislá na h.

Mezi jednokrokové metody patří

- Eulerova metoda
- Rungovy-Kuttovy metody

1. EULEROVA METODA

Taylorův rozvoj funkce y se středem x_n má tvar

$$y\left(x_{n+1}\right) = y\left(x_n\right) + y'\left(x_n\right)\left(x_{n+1} - x_n\right) + \frac{y''\left(\xi\right)}{2}\left(x_{n+1} - x_n\right)^2,$$

pro nějaké (neznámé) $\xi \in [x_n, x_{n+1}]$.

Dosazením $y_n \approx y\left(x_n\right)$, $y'\left(x_n\right) = f\left(x_n, y_n\right)$, $h = x_{n+1} - x_n$ dostaneme

$$y_{n+1} = y_n + f\left(x_n, y_n\right) h + \mathcal{O}\left(h^2\right)$$

Z toho odvodíme předpis Eulerovy metody:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right), \quad y_0 = p.$$

Z uvedeného Taylorova rozvoje určíme vztah pro lokální relativní diskretizační chybu:

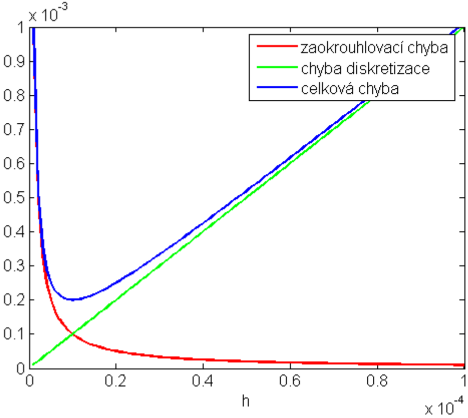
$$\begin{aligned}\delta_n(h) &= \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, y(x_n), h) \\ &= \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - y'(x_n) = \frac{y''(\xi)}{2} h.\end{aligned}$$

Z toho plyne, že

$$|\delta_n(h)| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]} |y''(x)|}{2} h = Ch.$$

Z toho plyne, že Eulerova metoda je prvního řádu.

Zaokrouhlovací chyba u jednokrokových metod většinou závisí nepřímo úměrně na velikosti integračního kroku, lze ji přibližně vyjádřit jako $\frac{C}{h}$.
Chybu nelze neomezeně zmenšovat, lze dosáhnou pouze určité mezní přesnosti.



PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -101y$, $x \in [0, 1]$, $y\,(0) = 2$ Eulerovou metodou s krokem $h = 0,02$.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -101y$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 2$ Eulerovou metodou s krokem $h = 0,02$.

ŘEŠENÍ: Definujme $x_i := 0,02i$, $y_i \approx y(x_i)$.

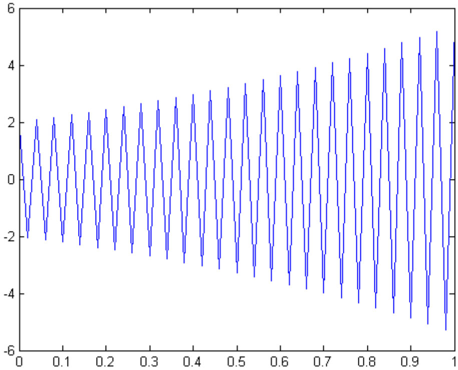
Daná metoda má předpis

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n - 101 \cdot 0,02\ y_n = -1,02y_n,\ \ y_0 = 2.$$

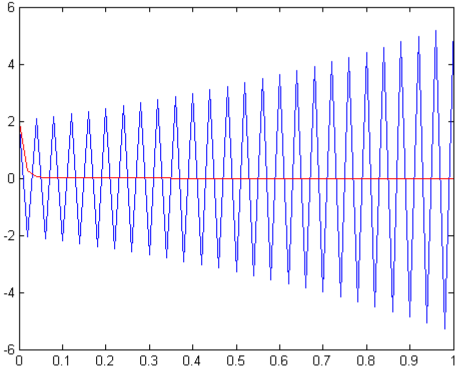
Potom

$$\begin{aligned} y_1 &= -1,02 \cdot 2 = -2,04 \\ y_2 &= -1,02 \cdot (-2,04) = 2,0808 \\ y_3 &= -1,02 \cdot 2,0808 = -2,1224 \\ y_4 &= -1,02 \cdot 2,1224 = 2,1649 \end{aligned}$$

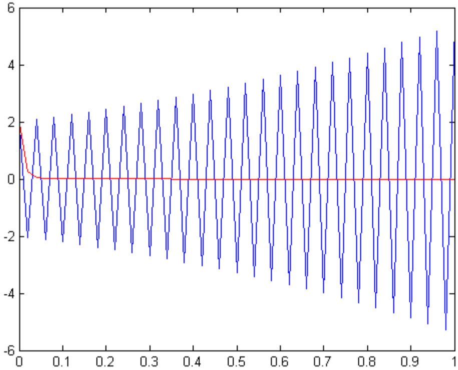
graf přibližného řešení



Přesné řešení dané rovnice je funkce $y^*(x) = 2e^{-101x}$, $x \in [0, 1]$.



Přesné řešení dané rovnice je funkce $y^*(x) = 2e^{-101x}$, $x \in [0, 1]$.



Eulerova metoda pro danou rovnici a danou volbu kroku je nestabilní. Musíme zvolit menší integrační krok.

Volba integračního kroku

Pro velký integrační krok nemusí být výsledek dostatečně přesný nebo metoda může být nestabilní.

Pro velmi malý integrační krok může být daná metoda příliš výpočetně náročná nebo může dojít ke katastrofální kumulaci zaokrouhlovacím chyb.

Interval absolutní stability jednokrokových metod (zjednodušeně)

Každou jednokrokovou metodu charakterizuje interval absolutní stability.

Jestliže je $\lambda < 0$, kde λ je odhad $\frac{\partial f}{\partial y}$, potom volíme integrační krok h tak, aby $h\lambda$ leželo v intervalu absolutní stability. Jinak by daná metoda nebyla stabilní.

Jestliže je $\lambda > 0$, potom volíme integrační krok nezávisle na intervalu absolutní stability.

Interval absolutní stability Eulerovy metody je interval $(-2, 0)$.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -101y$, $x \in [0,1]$, $y(0) = 2$ Eulerovou metodou. Pro jakou volbu kroku je Eulerova metoda pro tuto rovnici stabilní?

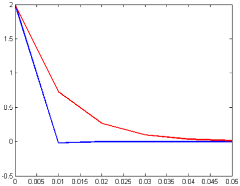
$f(x,y) = -101y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -101$.

Podmínka $-101h \in (-2, 0)$ je splněna pro $h \in (0; 2/101) = (0; 0,0198)$.

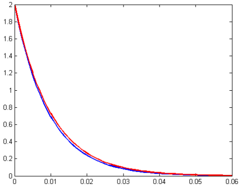
Eulerova metoda je pro danou rovnici stabilní, pokud krok h je menší než $0,0198$.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -101y$, $x \in [0,1]$, $y(0) = 2$ Eulerovou metodou.

$h = 0,01$
$N = 100$



$h = 0,001$
$N = 1000$



$h = 0,0001$
$N = 10000$