MATEMATIKA 3

Dana Černá

https://kmd.fp.tul.cz

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ODR S POČÁTEČNÍMI PODMÍNKAMI

Úloha: Určete řešení soustavy ODR prvního řádu

$$y' = f\left(x, y\right), \; x \in \left[a, b\right], \quad y\left(a\right) = p.$$

Jednokrokové metody mají předpis:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi\left(x_n, y_n, h\right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad y_0 = p.$$

Mezi jednokrokové metody patří

- Eulerova metoda
- Rungeovy-Kuttovy metody

1. EULEROVA METODA

Eulerova metoda má předpis

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right), \quad y_0 = p.$$

Eulerova metoda je prvního řádu, často je proto třeba pro dosažení dané přesnosti volit velmi malý krok.

Interval absolutní stability Eulerovy metody je interval $(-2, 0)$.

Odhad chyby metodou polovičního kroku:

Uvažujme jednokrokovou metodu p-tého řádu.

Označme x_n^{2h} uzly pro krok $2h$ a y_n^{2h} řešení touto metodou s krokem $2h$.

Označme x_n^h uzly pro krok h a y_n^h řešení touto metodou s krokem h.

Platí

$$e_{2n}(h) = y_{2n}^h - y^*\left(x_{2n}^h\right) \approx \frac{y_n^{2h} - y_{2n}^h}{2^p - 1}.$$

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -y \cos x$, $x \in [0; 0,6]$, $y(0) = 2$, Eulerovou metodou s krokem $h = 0,1$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -y \cos x$, $x \in [0; 0,6]$, $y(0) = 2$, Eulerovou metodou s krokem $h = 0,1$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

Pro krok $h = 0,2$ dostaneme

$$x_n^{0,2} = 0,2n,\ \ y_{n+1}^{0,2} = y_n^{0,2} - 0,2y_n^{0,2} \cos x_n^{0,2},\ \ y_0^{0,2} = 2.$$

Pro krok $h = 0,1$ dostaneme

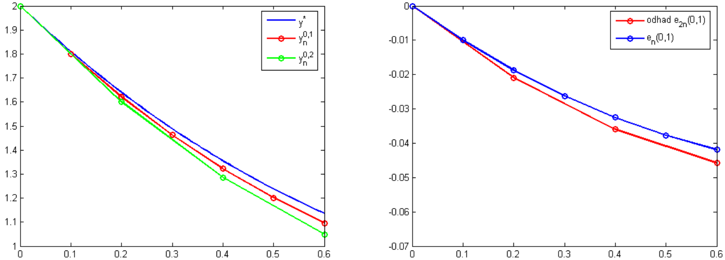
$$x_n^{0,1} = 0,1n,\ \ y_{n+1}^{0,1} = y_n^{0,1} - 0,1y_n^{0,1} \cos x_n^{0,1},\ \ y_0^{0,1} = 2.$$

Přesné řešení dané úlohy je funkce $y^*(x) = 2e^{-\sin x}$.

Pro odhad chyby platí:

$$e_{2n}(0,1) = y_{2n}^{0,1} - y^*\left(x_{2n}^{0,1}\right) \approx \frac{y_n^{0,2} - y_{2n}^{0,1}}{2-1} = y_n^{0,2} - y_{2n}^{0,1}.$$

$h = 0,1$			$h = 0,2$			odhad		
n	$x_n^{0,1}$	$y_n^{0,1}$	n	$x_n^{0,2}$	$y_n^{0,2}$	$e_{2n}(0,1)$	$y^*(x_n)$	$e_{2n}(0,1)$
0	0	2,0000	0	0	2,0000	0,0000	2,0000	0,0000
1	0,1	1,8000						
2	0,2	1,6209	1	0,2	1,6000	-0,0209	1,6396	-0,0187
3	0,3	1,4620						
4	0,4	1,3224	2	0,4	1,2864	-0,0360	1,3549	-0,0325
5	0,5	1,2006						
6	0,6	1,0952	3	0,6	1,0495	-0,0457	1,1371	-0,0419



y^*
$y_n^{0,1}$
$y_n^{0,2}$
odhad $e_{2n}(0,1)$
$e_n(0,1)$

2. RUNGEOVY-KUTTOVY METODY

Přírůstková funkce má tvar

$$\Phi\left(x, y, h\right) = w_1 k_1 + w_2 k_2 + \ldots + w_s k_s,$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(x, y\right), \\ k_i &= f\left(x + \alpha_i h, y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\right), \quad i = 2, \ldots, s. \end{aligned}$$

Konstanty $w_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ se volí tak, aby metoda byla řádu p.

Rungeova-Kuttova metoda prvního řádu je Eulerova metoda.

Rungeova-Kuttova metoda druhého řádu

Jedna z Rungeových-Kuttových metod druhého řádu nazývaná také Heunova metoda má předpis

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{aligned}$$

Tato metoda má interval absolutní stability $(-2, 0)$.

Rungeova-Kuttova metoda třetího řádu

Rungeova-Kuttova metoda třetího řádu má předpis:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}\left(k_1 + 3k_3\right), \\
k_1 &= f\left(x_n, y_n\right), \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}k_2\right).
\end{aligned}
$$

Tato metoda má interval absolutní stability $(-2,51; 0)$.

Rungeova-Kuttova metoda čtvrtého řádu

Jedna z Rungeho-Kuttových metod čtvrtého řádu má předpis:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(x_n, y_n\right), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f\left(x_n + h, y_n + hk_3\right). \end{aligned}$$

Interval absolutní stability je interval $(-2,78; 0)$. Tato metoda je nejpoužívanější explicitní jednokrokovou metodou.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -y\cos x$, $x \in [0; 0,6]$, $y\,(0) = 2,$. Porovnejte řešení Eulerovou metodou, Heunovou metodou a Rungeho-Kuttovou metodu čtvrtého řádu pro krok $h = 0,1$.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -y \cos x$, $x \in [0; 0,6]$, $y(0) = 2,$. Porovnejte řešení Eulerovou metodou, Heunovou metodou a Rungeho-Kuttovou metodu čtvrtého řádu pro krok $h = 0,1$.

Heunova metoda má předpis:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{0,1}{2}\left(k_1 + k_2\right), \\ k_1 &= -y_n \cos x_n, \\ k_2 &= -\left(y_n + 0,1 k_1\right) \cos\left(x_n + 0,1\right). \end{aligned}$$

Rungeho-Kuttova metoda čtvrtého řádu má předpis:

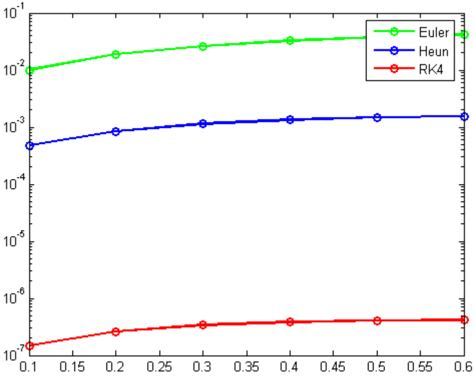
$$y_{n+1} = y_n + \frac{0,1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= -y_n \cos x_n, \\
k_2 &= -\left(y_n + \frac{0,1}{2}k_1\right)\cos\left(x_n + \frac{0,1}{2}\right), \\
k_3 &= -\left(y_n + \frac{0,1}{2}k_2\right)\cos\left(x_n + \frac{0,1}{2}\right), \\
k_4 &= -\left(y_n + 0,1k_3\right)\cos\left(x_n + 0,1\right).
\end{aligned}$$

Tabulka hodnot přibližného řešení pro jednotlivé metody

x_n	Euler	Heun	RK4
0	**2,00000000**	**2,00000000**	**2,00000000**
0,1	**1,80**000000	**1,8**1044962	**1,809976**47
0,2	**1,6**2089925	**1,6**4048880	**1,63964**213
0,3	**1,4**6204033	**1,48**941834	**1,48828**909
0,4	**1,3**2236628	**1,35**623417	**1,354901**99
0,5	**1,2**0056828	**1,23**974634	**1,23827**833
0,6	**1**,09520850	**1,13**867676	**1,13712**718

Graf chyby



Euler
Heun
RK4
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6

PŘÍKLAD: Řešte soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1, \\ y_2' &= -999y_1 - 1000y_2, \end{aligned}$$

s podmínkami

$$y_1(0) = 2, y_2(0) = 1.$$

Budeme danou soustavu řešit Eulerovou metodou. Není zadán interval, budeme proto počítat přibližné řešení, dokud se toto řešení bude významně měnit, tj. dokud se řešení neustálí.

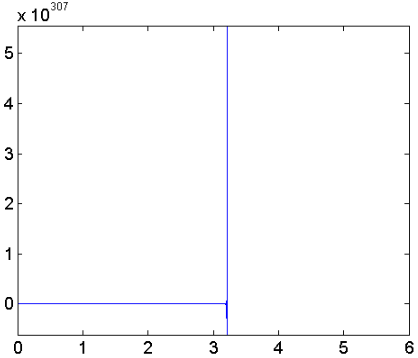
Eulerova metoda pro řešení dané soustavy má předpis

$$\begin{aligned} y^1_{n+1} &= y^1_n + h\left(-y^1_n\right), \\ y^2_{n+1} &= y^2_n + h\left(-999y^1_n - 1000y^2_n\right), \end{aligned}$$

kde $y^1_0 = 2,\ y^2_0 = 1$.

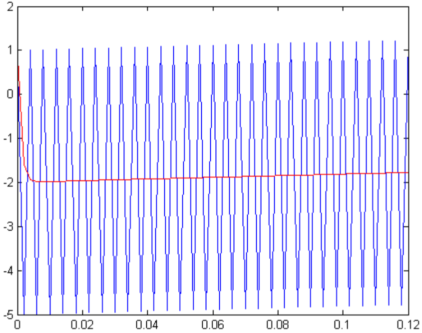
Zvolme nejprve krok $h = 0,01$. Hodnoty přibližného řešení u složky y_n^2 výrazně narůstají, po několika krocích je hodnota větší než maximální číslo typu double. Metoda je pro danou soustavu a zvolený krok nestabilní.

Graf přibližného řešení y_n^2



Zvolme krok $h = 0,002$. Přibližné řešení y_n^2 osciluje. Metoda je pro danou soustavu a zvolený krok nestabilní.

Graf přibližného řešení y_n^2

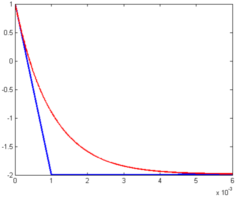


Pro volbu kroku $h = 0,001$ je již výpočet stabilní.

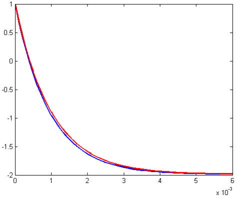
Budeme počítat přibližné řešení, dokud se toto řešení bude významně měnit, tj. na intervalu $[0, 5]$. Počet kroků označíme N, platí $5 = hN$.

Graf přibližného řešení y_n^2 a přesného řešení y_2

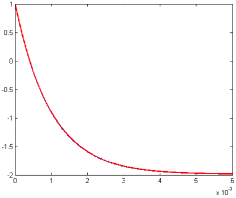
$h = 0,001$
$N = 5000$



$h = 0,0001$
$N = 50000$

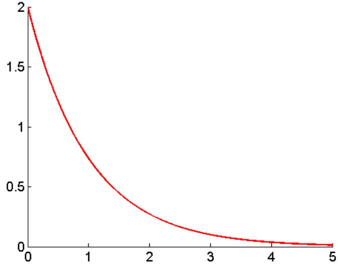


$h = 0,00001$
$N = 500000$

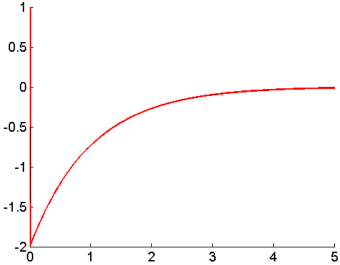


Přesné řešení soustavy je $y_1(x) = 2e^{-x}$, $y_2(x) = -2e^{-x} + 3e^{-1000x}$. Funkce y_2 je součtem násobku velmi rychle klesající funkce e^{-1000x} a násobku pomaleji klesající funkce e^{-x}. Abychom zachytili pokles první funkce, musíme zvolit velmi malý krok. Daná soustava patří mezi soustavy se silným tlumením.

Graf y_1



Graf y_2



Soustavy se silným tlumením

Řešení rovnice nebo soustavy rovnic se někdy skládá z několika složek, z nichž jedna klesá velmi rychle a jiná poměrně pomalu. Takové soustavy se nazývají soustavy se silným tlumením (stiff systems).

Rychle klesající složka omezuje velikost kroku, pro dosažení stability a požadované přesnosti je nutné volit velmi malý krok. Většinou počítáme přibližné řešení, dokud se toto řešení neustálí. Pomalu klesající složka potom určuje délku intervalu, na kterém počítáme řešení. Je tedy nutné počítat s velmi malým krokem na relativně dlouhém intervalu a výpočet přibližného řešení pomocí dosud uvedených metod vyžaduje extrémní množství kroků.

Dosud uvedené explicitní jednokrokové metody proto nejsou vhodné k řešení takových soustav. K jejich řešení se používají spíše implicitní metody nebo metody typu prediktor-korektor, které jsou kombinací explicitních a implicitních metod.

3. IMPLICITNÍ EULEROVA METODA

Tato metoda má předpis

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right), \;\; y_0 = p.$$

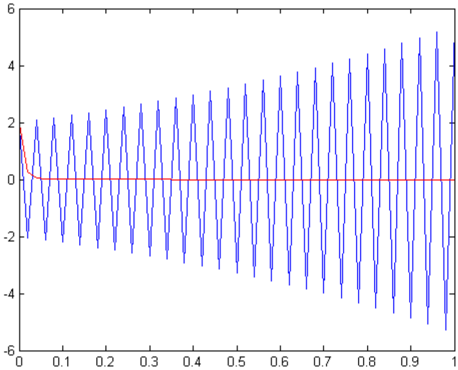
Tato metoda je stabilní nezávisle na velikosti kroku, proto říkáme, že je absolutně stabilní.

V každém kroku je obecně třeba řešit nelineární rovnici nebo nelineární soustavu.

Implicitní Eulerova metoda je prvního řádu.

PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -101y$, $x \in [0,1]$, $y(0) = 2$ Eulerovou metodou s krokem $h = 0,02$.

graf přibližného řešení a přesného řešení



Eulerova metoda pro danou rovnici a danou volbu kroku je nestabilní.

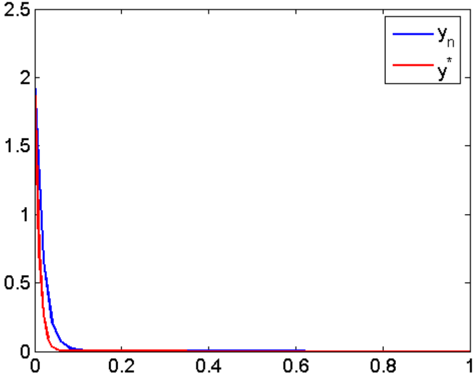
PŘÍKLAD: Řešte rovnici $y' = -101y$, $x \in [0,1]$, $y(0) = 2$ implicitní Eulerovou metodou s krokem $h = 0,02$.

Implicitní Eulerova metoda má předpis:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n - 0,02 \cdot 101 y_{n+1}, \; y_0 = 2.$$

Z toho plyne

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + 0,02 \cdot 101} = \frac{y_n}{3,02}.$$



2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
y_n
y*

Při volbě metody pro řešení daného problému bereme v úvahu

- stabilitu metod
- řád metody (má vliv na počet kroků k dosažení dané přesnosti)
- výpočetní náročnost jednoho kroku metody (počet vyhodnocení pravé strany)

Kromě uvedených explicitních a implicitních jednokrokových metod, je možné použít mnohokrokové metody nebo metody typu prediktor-korektor.

4. GEAROVY METODY

jsou vhodné k řešení soustav se silným tlumením. Tyto metody jsou stabilní nezávisle na velikosti kroku. V každém kroku je obecně třeba řešit nelineární rovnici nebo nelineární soustavu.

Gearova metoda druhého řádu má předpis:

$$y_{n+1} = \frac{4}{3} y_n - \frac{1}{3} y_{n-1} + \frac{2}{3} hf\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right), \ \ y_0 = p.$$

Hodnotu y_1 určíme pomocí nějaké jednokrokové metody druhého řádu.

Gearova metoda čtvrtého řádu má předpis:

$$y_{n+1} = \frac{48}{25} y_n - \frac{36}{25} y_{n-1} + \frac{16}{25} y_{n-2} - \frac{3}{25} y_{n-3} + \frac{12}{25} hf\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right), \ y_0 = p.$$

Hodnoty y_1, y_2, y_3 určíme pomocí vhodné metody čtvrtého řádu.