MATEMATIKA 3

Dana Černá

https://kmd.fp.tul.cz

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ OKRAJOVÝCH ÚLOH

Úloha: Řešte diferenciální rovnici

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \, na \, (a, b)$$

s Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$y\,(a) = \alpha, \;\; y\,(b) = \beta.$$

VĚTA: Postačující podmínka existence řešení
Jestliže existují konstanty k, l, m takové, že platí

$$0 < k \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}\,(x, y, z) \right| \leq l, \;\; \left| \frac{\partial f}{\partial z}\,(x, y, z) \right| \leq m,$$

na množině $[a, b] \times \mathbb{R}^2$, potom existuje řešení rovnice
$y'' = f\,(x, y, y')$ na (a, b), $y\,(a) = \alpha$, $y\,(b) = \beta$.

METODA SÍTÍ

Rozdělme interval $[a, b]$ na N podintervalů délky $h = \frac{b-a}{N}$, h se nazývá krok metody.

Krajní body podintervalů se nazývají uzly metody. Označíme je $x_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$. Množina uzlů se nazývá síť.

Budeme hledat hodnoty přibližného řešení v uzlech, přibližnou hodnotu řešení v uzlu x_n označíme y_n.

Aproximace derivací pomocí diferencí

Pro $y \in C^4(a,b)$ existují body ξ_1 a ξ_2 takové, že $\xi_1 \in [x_n, x_n + h]$ a $\xi_2 \in [x_n - h, x_n]$ a Taylorův rozvoj funkce y se středem x_n v bodech $x_n + h$ a $x_n - h$ má tvar

$$
\begin{aligned}
1.) y(x_n + h) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi_1), \\
2.) y(x_n - h) &= y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi_2).
\end{aligned}
$$

Ze vztahu 1.) vyjádříme $y'(x)$ a dostaneme

$$
y'(x_n) = \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h} + \mathcal{O}(h) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}
$$

Tento vztah pro přibližný výpočet derivace se nazývá dopředná diference. Vidíme, že chyba je řádu $\mathcal{O}(h)$ pro $y \in C^2([a,b])$.

Ze vztahu 2.) vyjádříme $y'(x)$ a dostaneme

$$y'(x_n) = \frac{y(x_n) - y(x_n - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

Tento vztah pro přibližný výpočet derivace se nazývá zpětná diference. Vidíme, že chyba je řádu $\mathcal{O}(h)$ pro $y \in C^2([a, b])$.

Pomocí rozdílu 1.) - 2.) dostaneme

$$y'(x_n) = \frac{y(x_n + h) - y(x_n - h)}{2h} + \mathcal{O}\left(h^2\right) \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$$

Tento vztah pro přibližný výpočet derivace se nazývá centrální diference. Vidíme, že chyba je řádu $\mathcal{O}\left(h^2\right)$ pro $y \in C^3([a, b])$.

Pomocí součtu 1.) + 2.) dostaneme vztah pro přibližný výpočet druhé derivace

$$\begin{aligned} y''(x_n) &= \frac{y(x_n+h) - 2y(x_n) + y(x_n-h)}{h^2} + \mathcal{O}\left(h^2\right) \\ &\approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} \end{aligned}$$

Vidíme, že chyba je řádu $\mathcal{O}\left(h^2\right)$ pro $y \in C^4([a, b])$.

Nyní v dané rovnici

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \, na \, [a, b]\,, \ \ y\,(a) = \alpha, \ \ y\,(b) = \beta,$$

nahradíme derivace v uzlech x_n diferencemi

$$y'\,(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}, \ \ y''\,(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}.$$

Dostaneme soustavu síťových rovnic

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} &= f\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}\right), \ \ n = 1, \ldots, N-1, \\ y_0 &= \alpha, \quad y_N = \beta. \end{aligned}$$

Budeme rozlišovat dva případy:

- f je lineární vzhledem k y a y',
- f je nelineární vzhledem k y a y'.

1. Budeme předpokládat, že pravá strana f je lineární vzhledem k y a y', potom má daná rovnice tvar

$$y'' = a(x)\,y' + b(x)\,y + c(x)\; na\,[a,b]\,,\;\; y(a) = \alpha,\;\; y(b) = \beta.$$

Dále budeme předpokládat, že funkce a, b a c jsou spojité na intervalu $[a,b]$ a že $b(x) \geq 0$ pro $x \in [a,b]$. Potom má daná úloha právě jedno řešení.
Po nahrazení derivací v uzlech diferencemi dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} &= a_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + b_n y_n + c_n,\;\; n = 1, \ldots, N-1, \\ y_0 &= \alpha, \quad y_N = \beta, \end{aligned}$$

kde $a_n = a(x_n)$, $b_n = b(x_n)$ a $c_n = c(x_n)$.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{h^2}+\frac{a_1}{2h}\right)y_0+\left(\frac{-2}{h^2}-b_1\right)y_1+\left(\frac{1}{h^2}-\frac{a_1}{2h}\right)y_2 &= c_1\\
\left(\frac{1}{h^2}+\frac{a_2}{2h}\right)y_1+\left(\frac{-2}{h^2}-b_2\right)y_2+\left(\frac{1}{h^2}-\frac{a_2}{2h}\right)y_3 &= c_2\\
\vdots \quad &\quad \vdots\\
\left(\frac{1}{h^2}+\frac{a_{N-1}}{2h}\right)y_{N-2}+\left(\frac{-2}{h^2}-b_{N-1}\right)y_{N-1}+\left(\frac{1}{h^2}-\frac{a_{N-1}}{2h}\right)y_N &= c_{N-1}\\
y_0=\alpha, \quad y_N &= \beta,
\end{aligned}
$$

Do rovnic dosadíme $y_0 = \alpha$ a $y_N = \beta$ a dostaneme soustavu:

$$\begin{pmatrix} \frac{-2}{h^2}-b_1 & \frac{1}{h^2}-\frac{a_1}{2h} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h^2}+\frac{a_2}{2h} & \frac{-2}{h^2}-b_2 & \frac{1}{h^2}-\frac{a_2}{2h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2}+\frac{a_3}{2h} & \frac{-2}{h^2}-b_3 & \frac{1}{h^2}-\frac{a_3}{2h} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2}+\frac{a_{N-1}}{2h} & \frac{-2}{h^2}-b_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1-\left(\frac{1}{h^2}+\frac{a_1}{2h}\right)\alpha \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{N-1}-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{a_{N-1}}{2h}\right)\beta \end{pmatrix}$$

Matice soustavy je třídiagonální a je regulární pro $h < \dfrac{2}{\max\limits_{n=0,\dots,N} |a_n|}$.

Soustavu lze efektivně řešit například pomocí Gaussovy eliminace.

VĚTA: Jestliže $y \in C^4([a,b])$, funkce a, b, c jsou spojité, b je kladná na $[a,b]$ a $h < \frac{2}{\max\limits_{n=0,\dots,N} |a_n|}$, potom platí

$$\max_{n=1,\dots,N-1} |y_n - y(x_n)| \leq Ch^2,$$

kde C je konstanta nezávislá na h.

PŘÍKLAD: Řešte diferenciální rovnici

$$u'' + xu' - u = -x^2 - 2 \text{ na } [0,1], \quad u(0) = 0, \; u(1) = 0,$$

metodou sítí s krokem $h = 0.25$.

PŘÍKLAD: Řešte diferenciální rovnici

$$u'' + xu' - u = -x^2 - 2 \text{ na } [0,1], \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0,$$

metodou sítí s krokem $h = 0.25$.

Pro daný krok definujme uzly $x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 0,75$ a $x_4 = 1$.

Pro přibližné řešení v uzlech dostaneme soustavu

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{0.25^2} + x_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2 \cdot 0.25} - y_n = -x_n^2 - 2,\ n = 1,2,3,$$
$$y_0 = 0, \quad y_4 = 0.$$

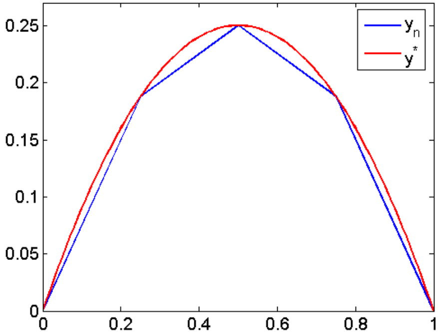
Po úpravě dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} -33 & 16,5 & 0 \\ 15 & -33 & 17 \\ 0 & 14,5 & -33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,0625 \\ -2,25 \\ -2,5625 \end{pmatrix}.$$

Přesné řešení je funkce $y^*(x) = x(1-x)$.

x_n	y_n	$y^*(x_n)$
0,25	0,18750000	0,18750000
0,5	0,25000000	0,25000000
0,75	0,18750000	0,18750000

Graf přibližného a přesného řešení



Pokud je řešení okrajové úlohy polynomem stupně nejvýše dva, potom je přibližné řešení rovno přesnému řešení v daných uzlech (až na zaokrouhlovací chyby).

PŘÍKLAD: Řešte diferenciální rovnici

$$u'' + 4x^2 u = 2\cos x^2 \text{ na } [0,1]\,, \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0,8415.$$

PŘÍKLAD: Řešte diferenciální rovnici

$$u'' + 4x^2 u = 2\cos x^2 \text{ na } [0,1], \quad u(0) = 0, \; u(1) = 0,8415.$$

Pro daný krok $h = \frac{1}{N}$ definujme uzly $x_n = nh$, $n = 0, \dots, N$.

Pro přibližné řešení v uzlech dostaneme soustavu

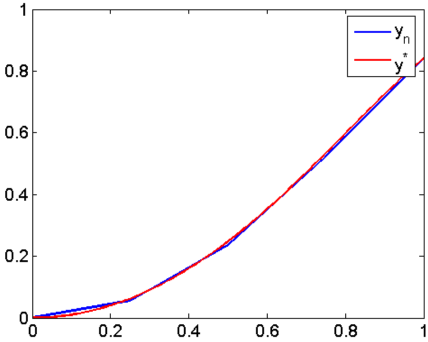
$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + 4x_n^2 y_n = 2\cos x_n^2, \; n = 1, \dots, N-1,$$
$$y_0 = 0, \quad y_N = 0,8415.$$

Přesné řešení je funkce $y^*(x) = \sin x^2$.

N	$\max\limits_{n=0,\ldots,N} \lvert y_n - y^*(x_n) \rvert$
4	0.01106093167274
8	0.00290927547469
16	0.00072459078434
32	0.00018105547419
64	0.00004530125902
128	0.00001132465831
256	0.00000283112352
512	0.00000070778433
1024	0.00000017694625
2048	0.00000004423605

Při zdvojnásobení počtu podintervalů klesne chyba přibližně na čtvrtinu předchozí chyby.

Graf přibližného a přesného řešení pro krok $h = 0,25$



PŘÍKLAD: Metodou sítí řešte diferenciální rovnici

$$u'' = \frac{e^{100(x+1)} + e^{100x} - 4e^{200x}}{\left(e^{100} - 1\right)^2} \text{ na } [0,1]\,, \quad u\left(0\right) = 0,\; u\left(1\right) = 0.$$

PŘÍKLAD: Metodou sítí řešte diferenciální rovnici

$$u'' = \frac{e^{100(x+1)} + e^{100x} - 4e^{200x}}{\left(e^{100}-1\right)^2} \text{ na } [0,1], \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0.$$

Pro daný krok $h = \frac{1}{N}$ definujme uzly $x_n = nh$, $n = 0, \ldots, N$.

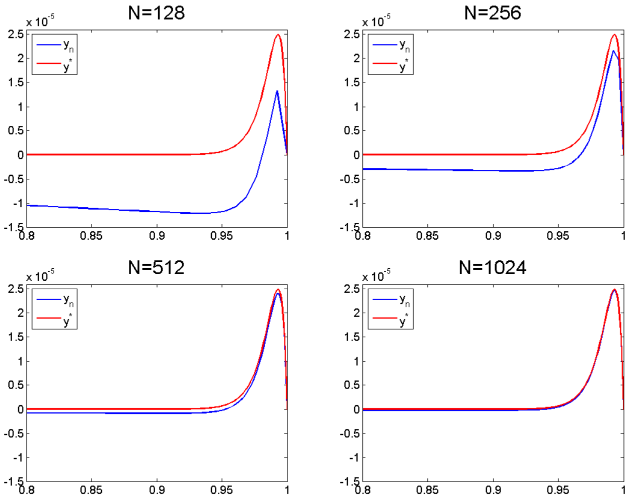
Pro přibližné řešení v uzlech dostaneme soustavu

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = \frac{e^{100(x_n+1)} + e^{100x_n} - 4e^{200x_n}}{\left(e^{100}-1\right)^2}, \quad n = 1, \ldots, N-1,$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0.$$

N	relativní chyba $\max\limits_{n=0,\dots,N} \lvert y_n - y^*(x_n) \rvert \,/\, \max\limits_{n=0,\dots,N} \lvert y^*(x_n) \rvert$
32	9.59230026107415
64	2.16618436768732
128	0.53108834863991
256	0.14828577892237
512	0.03810311682051
1024	0.00952490602195
2048	0.00238548021040
4096	0.00059662767045

Grafy přibližného a přesného řešení



2. Jestliže f je nelineární vzhledem k y a y', potom je soustava síťových rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} &= f\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}\right), \quad n = 1, \dots, N-1, \\
y_0 &= \alpha, \quad y_N = \beta
\end{aligned}
$$

nelineární. Tuto soustavu řešíme numericky například Newtonovou metodou.