Příklady z numerické matematiky

Příklad 1. Vypočtěte l^1-normu, l^2-normu a l^∞-normu vektoru $\mathbf{v}$, kde

a) $\mathbf{v} = (1, -2, 3)$,
b) $\mathbf{v} = (4, 0, -5, 2)$.

Příklad 2. Vypočtěte $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_\infty$ a Frobeniovu normu matice $\mathbf{A}$, kde

a) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -9 \end{pmatrix},$$ b) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Pomocí LU rozkladu řešte soustavy

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 11, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 11, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ -x_1 - 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 + 10x_2 &= 12, \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 22, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Příklad 4. Rozhodněte, zda matice $\mathbf{A}$ je symetrická a pozitivně definitní. Pokud ano, určete Choleského rozklad matice

a) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$ b) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Napište předpis Jacobiho metody pro řešení dané soustavy. Rozhodněte, zda pro tuto soustavu Jacobiho metoda konverguje a rozhodnutí zdůvodněte. Za počáteční vektor zvolte nulový vektor a proveďte dvě iteraace.

a) $$\begin{aligned} 10x_1 - 3x_2 + x_3 &= 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 1, \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Příklad 6. Napište předpis Gaussovy-Seidelovy metody pro řešení dané soustavy. Rozhodněte, zda pro tuto soustavu Gaussova-Seidelova metoda konverguje a rozhodnutí zdůvodněte. Za počáteční vektor zvolte nulový vektor a proveďte dvě iteraace.

a)
$$\begin{aligned} 10x_1 - 3x_2 + x_3 &= 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Příklad 7. Napište příklad matice řádu 4, pro kterou Jacobiho metoda konverguje. (Neuvádějte jako příklad diagonální matici.)

Příklad 8. Napište příklad matice řádu 4, pro kterou Gaussova-Seidelova metoda konverguje. (Neuvádějte jako příklad diagonální matici.)

Příklad 9. Metodou nejmenších čtverců řešte soustavu

a)
$$\begin{aligned} x + y &= 4, \\ x + 3y &= 5, \\ 2x + y &= 5, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y &= 3, \\ 2x + y &= 4, \\ x + 3y &= 5. \end{aligned}$$

Příklad 10. Metodou půlení intervalu řešte rovnici $\cos x = \ln x$ na intervalu $[1, 2]$. Určete výsledek s chybou menší než $0,2$.

Příklad 11. Metodou sečen řešte rovnici $\cos x = \ln x$ na intervalu $[1, 2]$. Proveďte dvě iterace.

Příklad 12. Newtonovou metodou řešte rovnici $\cos x = \ln x$. Jako počáteční hodnotu zvolte $x_0 = 1$. Určete výsledek s přesností na tři platné cifry.

Příklad 13. Určete Lagrangeův interpolační polynom, který prochází body
a) $[0, 2]$, $[1, 0]$, $[3, 2]$ a $[5, 4]$,
b) $[0, 1]$, $[1, 1]$, $[3, 2]$ a $[4, 3]$,
c) $[1, 1]$, $[2, 1]$, $[4, 2]$ a $[5, 3]$.

Příklad 14. Vypočtěte $\int_0^1 \sin x^2 \,\mathrm{dx}$ pomocí složeného obdélníkového pravidla s krokem $h = 0,25$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

Příklad 15. Vypočtěte $\int_0^1 \sin x^2 \,\mathrm{dx}$ pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s krokem $h = 0,25$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

Příklad 16. Vypočtěte $\int_0^1 \sin x^2 \,\mathrm{dx}$ pomocí složeného Simpsonova pravidla s krokem $h = 0,25$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

Příklad 17. Převeďte diferenciální rovnici

$$y^{(4)} + 3y^{(3)} + 2y + \sin x = 0$$

s podmínkami

$$y\,(0) = 0,\ y'\,(0) = 5,\ y''\,(0) = 3,\ y^{(3)}\,(0) = 2,$$

na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu s počátečními podmínkami.

Příklad 18. Řešte diferenciální rovnici $y' = -y + \sin x$ na $[0, 1]$ s podmínkou $y\,(0) = 1$ Eulerovou metodou s krokem $h = 0,25$.

Příklad 19. Napište předpis Eulerovy metody pro diferenciální rovnici $y' = -5y$ na intervalu $(0, 5)$, $y\,(0) = 4$, a obecný krok h. Pro jakou volbu kroku je tato metoda stabilní?

Příklad 20. Určete soustavu lineárních algebraických rovnic pro přibližné řešení rovnice

$$u'' + 2u = x^2 \quad \text{na} \quad (1, 3),\ u(1) = 0,\ u(3) = 4,$$

metodou sítí s krokem $h = 1/2$.

Příklad 21. Určete soustavu lineárních algebraických rovnic pro přibližné řešení rovnice $\Delta u = 2y$ na Ω, $u(x, y) = x^2 y$ na $\partial\Omega$, metodou sítí s krokem $h = 1$. Oblast Ω je vnitřek trojúhelníka s vrcholy $[0, 0]$, $[4, 0]$ a $[0, 4]$.

Příklad 22. Je dána rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ na } \Omega = (0, 1)^2$$

s podmínkami

$$u(x, 0) = \sin \pi x \text{ pro } x \in (0, 1)\,,\ u\,(0, t) = u\,(1, t) = 0 \text{ pro } t \in (0, 1)\,.$$

Určete soustavu lineárních algebraických rovnic pro přibližné řešení této rovnice metodou sítí s časovým krokem $\tau = 0,04$ a prostorovým krokem $h = 1/3$.

Výsledky a řešení vybraných úloh

1. a) $\|\mathbf{v}\|_1 = 1 + 2 + 3 = 6$, $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{1, 2, 3\} = 3$.
b) $\|\mathbf{v}\|_1 = 11$, $\|\mathbf{v}\|_1 = \sqrt{45}$, $\|\mathbf{v}\|_\infty = 5$.

2. a) Norma $\|\mathbf{A}\|_1$ je definována jako maximum ze součtů absolutních hodnot prvků ve sloupcích, je tedy $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{7, 2, 13\} = 13$. Norma $\|\mathbf{A}\|_\infty$ je definována jako maximum ze součtů absolutních hodnot prvků v řádcích, je tedy $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{2, 6, 14\} = 14$. Pro Frobeniovu normu platí $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{1 + 1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 81} = \sqrt{122}$.
b) $\|\mathbf{A}\|_1 = 13$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 11$, $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{115}$,

3. a) K nalezení matic $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ použijeme Doolitlův algoritmus. Budeme upravovat matici soustavy na trojúhelníkový tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Výsledná matice po eliminaci je horní trojúhelníková matice $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Matice $\mathbf{L}$ je matice, která má na diagonále jedničky, nad diagonálou nuly a ostatní prvky jsou koeficienty, kterými jsme násobili při eliminaci (s opačným znaménkem). Nejprve jsme ke druhému řádku přičetli -2 násobek prvního řádku, do matice $\mathbf{L}$ na pozici $(2, 1)$ proto napíšeme 2. Ke třetímu řádku jsme přičetli -3 násobek prvního řádku, do matice $\mathbf{L}$ na pozici $(3, 1)$ napíšeme 3. Ve druhém kroku eliminace jsme ke třetímu řádku přičetli $\frac{1}{4}$ druhého řádku, do matice $\mathbf{L}$ na pozici $(3, 2)$ napíšeme $-\frac{1}{4}$. Při tomto postupu pouze přičítáme násobek řádku k jinému řádku, nepřehazujeme řádky a neprovádíme násobení řádků. Dostali jsme matici

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní řešíme soustavu $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b}$ je vektor pravé strany soustavy.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Dostaneme $y_1 = 3$, $y_2 = -8$, $y_3 = 0$. Řešením soustavy $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, tj.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dostaneme řešení původní soustavy $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.

b) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,$

c) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,$

d) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3.$

4. a) Matice $\mathbf{A}$ je symetrická. Pomocí subdeterminantů matice $\mathbf{A}$ rozhodneme, zda je pozitivně definitní. Dostaneme $D_1 = 9$, $D_2 = 9\cdot2-3\cdot3 = 9$ a $D_3 = 9\cdot2\cdot2-3\cdot3\cdot2-9\cdot1\cdot1 = 9$. Protože jsou D_1, D_2 a D_3 kladné, je matice $\mathbf{A}$ pozitivně definitní. Můžeme tedy určit její Choleského rozklad, tj. hledáme dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}$ takovou, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$. Označme

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2+d^2 & bc+de \\ ac & bc+de & c^2+e^2+f^2 \end{pmatrix}.$$

Porovnáním levé a pravé strany určíme postupně:

$$\begin{aligned} a^2 &= 9 \Rightarrow a = 3, \\ ab &= 3 \Rightarrow b = 1, \\ ac &= 0 \Rightarrow c = 0, \\ b^2+d^2 &= 2 \Rightarrow d = 1, \\ bc+de &= 1 \Rightarrow e = 1, \\ c^2+e^2+f^2 &= 2 \Rightarrow f = 1. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. a) Nejprve z první rovnice vyjádříme x_1, ze druhé rovnice x_2, ze třetí x_3. Dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{7+3x_2-x_3}{10}, \\ x_2 &= \tfrac{3-x_1+x_3}{4}, \\ x_3 &= \tfrac{2-3x_1+2x_2}{6}. \end{aligned}$$

Pomocí tohoto vztahu definujeme předpis Jacobiho metody

$$\begin{aligned} x_1^{i+1} &= \tfrac{7+3x_2^i-x_3^i}{10}, \\ x_2^{i+1} &= \tfrac{3-x_1^i+x_3^i}{4}, \\ x_3^{i+1} &= \tfrac{2-3x_1^i+2x_2^i}{6}. \end{aligned}$$

Počáteční vektor může být libovolný, zvolme například $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$.

Jacobiho metoda pro tuto soustavu konverguje, protože matice soustavy je ostře diagonálně dominantní, tj. v každém řádku je diagonální prvek větší než součet absolutních hodnot ostatních prvků v tomto řádku.

Uvažujeme nulový počáteční vektor, tj. $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$, a provedeme dvě iterace:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \tfrac{7+3\cdot 0-0}{10} = 0,7, & x_1^2 &= \tfrac{7+3\cdot 0,75-0,3333}{10} = 0,8917, \\ x_2^1 &= \tfrac{3-0+0}{4} = 0,75, & x_2^2 &= \tfrac{3-0,7+0,3333}{4} = 0,6583, \\ x_3^1 &= \tfrac{2-3\cdot 0+2\cdot 0}{6} = 0,3333, & x_3^2 &= \tfrac{2-3\cdot 0,7+2\cdot 0,75}{6} = 0,2333. \end{aligned}$$

Po dvou iteracích jsme dostali přibližné řešení $x_1 = 0,892$, $x_2 = 0,658$, $x_3 = 0,233$.

b) $x_1^{i+1} = \dfrac{3 - x_2^i - x_3^i}{8}, x_2^{i+1} = \dfrac{1 - 4x_1^i + 3x_3^i}{5}, x_3^{i+1} = \dfrac{2 + x_1^i - x_2^i}{10}$, $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$. Jacobiho metoda pro danou soustavu konverguje, protože $\|B\|_1 = 0,9 < 1$, kde B je iterační matice. Pokud za počáteční vektor zvolíme nulový vektor, dostaneme po dvou iteracích přibližné řešení $x_1 = 0,325$, $x_2 = 0,02$, $x_3 = 0,2175$.

6. a) Nejprve z první rovnice vyjádříme x_1, ze druhé rovnice x_2, ze třetí x_3. Dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{7+3x_2-x_3}{10}, \\ x_2 &= \tfrac{3-x_1+x_3}{4}, \\ x_3 &= \tfrac{2-3x_1+2x_2}{6}. \end{aligned}$$

Pomocí tohoto vztahu definujeme předpis Gaussovy-Seidelovy metody.

$$\begin{aligned} x_1^{i+1} &= \tfrac{7+3x_2^i-x_3^i}{10}, \\ x_2^{i+1} &= \tfrac{3-x_1^{i+1}+x_3^i}{4}, \\ x_3^{i+1} &= \tfrac{2-3x_1^{i+1}+2x_2^{i+1}}{6}. \end{aligned}$$

Počáteční vektor může být libovolný, zvolme například $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$.

Gaussova-Seidelova metoda pro tuto soustavu konverguje, protože matice soustavy je ostře diagonálně dominantní, tj. v každém řádku je diagonální prvek větší než součet absolutních hodnot ostatních prvků v tomto řádku.

Uvažujeme nulový počáteční vektor, tj. $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$, a provedeme dvě iterace:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \tfrac{7+3\cdot 0-0}{10} = 0,7, & x_1^2 &= \tfrac{7+3\cdot 0{,}575-0{,}175}{10} = 0,855, \\ x_2^1 &= \tfrac{3-0{,}7+0}{4} = 0,575, & x_2^2 &= \tfrac{3-0{,}855+0{,}175}{4} = 0,580, \\ x_3^1 &= \tfrac{2-3\cdot 0{,}7+2\cdot 0{,}575}{6} = 0,175, & x_3^2 &= \tfrac{2-3\cdot 0{,}855+2\cdot 0{,}580}{6} = 0,0992. \end{aligned}$$

Po dvou iteracích jsme dostali přibližné řešení $x_1 = 0,855$, $x_2 = 0,580$, $x_3 = 0,099$.

b) $x_1^{i+1} = \dfrac{3 - x_2^i - x_3^i}{2}, x_2^{i+1} = \dfrac{1 - x_1^{i+1} - x_3^i}{2}, x_3^{i+1} = \dfrac{2 - x_1^{i+1} - x_2^{i+1}}{4}$, $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$. Gaussova-Seidelova metoda pro danou soustavu konverguje, protože je matice soustavy symetrická a pozitivně definitní. Po dvou iteracích dostaneme přibližné řešení $x_1 = 1,5313$, $x_2 = -0,3594$, $x_3 = 0,2070$.

7. Jacobiho metoda konverguje například pro ostře diagonálně dominantní matice, např.

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

8. Gaussova-Seidelova metoda konverguje například pro ostře diagonálně dominantní matice, např.

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

9. a) Zadanou soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

vynásobíme zleva transponovanou maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má řešení $x = \dfrac{13}{6} = 2,17$, $y = 1$, což je řešení původní soustavy metodou nejmenších čtverců.

b) $x = \dfrac{22}{15} = 1,47$, $y = \dfrac{6}{5} = 1,2$.

10. Označme $f(x) = \cos x - \ln x$. Budeme postupně zmenšovat zadaný interval $[1,2]$ tak, aby hodnoty funkce f v krajních bodech nových intervalů měly opačná znaménka.

1. Uvažujeme rovnici $f(x) = 0$ na intervalu $[1,2]$.

$f(1) = \cos 1 - \ln 1 = 0,5403 > 0$, $f(2) = \cos 2 - \ln 2 = -1,1093 < 0$.

Určíme střed intervalu $[1,2]$, tj. $c = \frac{1+2}{2} = 1,5$, $f(1,5) = -0,3347 < 0$.

2. Uvažujeme interval $[1;1,5]$, střed $c = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$, $f(1,25) = 0,0922 > 0$.

3. Uvažujeme interval $[1,25;1,5]$, střed $c = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375$.

Nyní je chyba, tj. absolutní hodnota rozdílu mezi přibližným a přesným řešením, menší než $1,375 - 1,25 = 0,125$, tj. menší než zadaná tolerance. Přibližným řešením dané rovnice je $x = 1,375$.

11. Označme $f(x) = \cos x - \ln x$. Předpis metody sečen pro rovnici $f(x) = 0$ má tvar

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Pro zadanou úlohu dostaneme

$x_0 = 1$, $x_1 = 2$,

$$x_{n+1} = x_n - (\cos x_n - \ln x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{\cos x_n - \ln x_n - \cos x_{n-1} + \ln x_{n-1}},$$

$$x_2 = 2 - (\cos 2 - \ln 2)\,\frac{2-1}{\cos 2 - \ln 2 - \cos 1 + \ln 1} = 1,3275,$$

$x_3 = 1,3008$.

Přibližným řešením dané rovnice je $x = 1,3008$.

12. Označme $f(x) = \cos x - \ln x$. Předpis Newtonovy metody pro rovnici $f(x) = 0$ má tvar

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Pro zadanou úlohu dostaneme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - \ln x_n}{-\sin x_n - \frac{1}{x_n}},\ x_0 = 1,$$

$$x_1 = 1 - \frac{\cos 1 - \ln 1}{-\sin 1 - \frac{1}{1}} = 1,2934,$$

$$x_2 = 1,2934 - \frac{\cos 1,2934 - \ln 1,2934}{-\sin 1,2934 - \frac{1}{1,2934}} = 1,3029,$$

$$x_3 = 1,3029 - \frac{\cos 1,3029 - \ln 1,3029}{-\sin 1,3029 - \frac{1}{1,3029}} = 1,3029.$$

Nyní se výsledek shoduje v prvních alespoň třech cifrách s předchozím, přibližným řešením dané rovnice je $x = 1,3029$.

13. Budeme počítat poměrné diference podle schématu

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$	$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$

a potom určíme Lagrangeův interpolační polynom v Newtonově tvaru

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2). \end{aligned}$$

Pro zadané hodnoty dostaneme

0	2			
1	0	$\dfrac{0-2}{1-0}=-2$		
3	2	$\dfrac{2-0}{3-1}=1$	$\dfrac{1+2}{3-0}=1$	
5	4	$\dfrac{4-2}{5-3}=1$	$\dfrac{1-1}{5-1}=0$	$\dfrac{0-1}{5-0}=-\dfrac{1}{5}$

Z toho plyne, že $L(x) = 2 - 2x + x(x-1) - \frac{1}{5}x(x-1)(x-3)$.

b) $L(x) = 1 + \frac{1}{6}x(x-1)$.
c) $L(x) = 1 + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$.

14. Daný interval rozdělíme na podintervaly délky $h = 0,25$, tj. podintervaly s krajními body $0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$. Středy těchto podintervalů jsou $0,125; 0,375; 0,625; 0,875$. Na každém podintervalu aproximujeme integrál obsahem obdélníka, který má délku jedné strany $h = 0,25$ a délku druhé strany určuje hodnota integrované funkce ve středu podintervalu. Dostaneme

$$\int_0^1 \sin x^2 \ \mathrm{dx} \approx 0,25 \left(\sin 0,125^2 + \sin 0,375^2 + \sin 0,625^2 + \sin 0,875^2\right) = 0,3074.$$

Obecný vzorec má tvar

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\,, \quad x_i = a + (i - 1/2)\, h.$$

Pro určení odhadu chyby metodou polovičního kroku použijeme výše uvedený vzorec pro krok $2h = 0,5$. Dostaneme

$$Q_{0,5} = 0,5 \left(\sin 0,25^2 + \sin 0,75^2\right) = 0,2979.$$

Odhad chyby je proto $e \approx \frac{Q_{0,25} - Q_{0,5}}{3} = 0,0032$.

15. Daný interval rozdělíme na podintervaly délky $h = 0,25$, tj. podintervaly s krajními body $0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$. Na každém podintervalu aproximujeme integrál obsahem lichoběžníka, který má výšku $h = 0,25$ a délky základen určují hodnoty integrované funkce v krajních bodech podintervalů. Dostaneme

$$\int_0^1 \sin x^2 \ \mathrm{dx} \approx 0,25 \left(\frac{\sin 0^2}{2} + \sin 0,25^2 + \sin 0,5^2 + \sin 0,75^2 + \frac{\sin 1^2}{2}\right) = 0,3160.$$

Obecný vzorec má tvar

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2}\right), \quad x_i = a + ih.$$

Pro určení odhadu chyby metodou polovičního kroku použijeme výše uvedený vzorec pro krok $2h = 0,5$. Dostaneme

$$Q_{0,5} = 0,5 \left(\frac{\sin 0^2}{2} + \sin 0,5^2 + \frac{\sin 1^2}{2}\right) = 0,3341.$$

Odhad chyby je proto $e \approx \frac{Q_{0,25} - Q_{0,5}}{3} = -0,006$.

16. Daný interval rozdělíme na podintervaly délky $h = 0,25$, tj. podintervaly s krajními body $0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$. Dostaneme

$$\int_0^1 \sin x^2 \ \mathrm{dx} \approx \frac{0,25}{3} \left(\sin 0^2 + 4 \sin 0,25^2 + 2 \sin 0,5^2 + 4 \sin 0,75^2 + \sin 1^2\right) = 0,3099.$$

Pro určení odhadu chyby metodou polovičního kroku použijeme Simpsonovo pravidlo pro krok $2h = 0,5$. Dostaneme

$$Q_{0,5} = \frac{0,5}{3} \left(\sin 0^2 + 4 \sin 0,5^2 + \sin 1^2\right) = 0,3052.$$

Odhad chyby je proto $e \approx \frac{Q_{0,25}-Q_{0,5}}{15} = 0,0003$.

17. Zavedeme substituci $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, $y_4 = y'''$. Dostaneme soustavu $y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$, $y_3' = y_4$, $y_4' = -3y_4 - 2y_1 - \sin x$, s podmínkami $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 5$, $y_3(0) = 3$, a $y_4(0) = 2$.

18. Předpis Eulerovy metody pro diferenciální rovnici $y' = f(x, y)$, $x \in (a, b)$, $y(a) = c$, má tvar $y_0 = c,\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, kde h je krok metody y_n je hodnota přibližného řešení v uzlu $x_n = a + nh$.

Pro danou rovnici máme uzly $0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$. Hodnoty přibližného řešení v těchto uzlech označíme po řadě $y_0, \ldots, y_4$. Předpis pro danou rovnici má tvar

$y_0 = 1,\ y_{n+1} = y_n + 0,25(-y_n + \sin x_n)$.

Dostaneme přibližné hodnoty řešení

$y_1 = 1 + 0,25(-1 + \sin 0) = 0,75$,

$y_2 = 0,75 + 0,25(-0,75 + \sin 0,25) = 0,624$,

$y_3 = 0,624 + 0,25(-0,625 + \sin 0,5) = 0,588$,

$y_4 = 0,588 + 0,25(-0,588 + \sin 0,75) = 0,612$.

19. Předpis Eulerovy metody pro diferenciální rovnici $y' = f(x, y)$, $x \in (a, b)$, $y(a) = c$, má tvar $y_0 = c,\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, kde h je krok metody y_n je hodnota přibližného řešení v uzlu $x_n = a + nh$.

Předpis pro danou rovnici má tvar

$y_0 = 4,\ y_{n+1} = y_n - 5hy_n$.

Vypočtěme $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} = -5$. Interval absolutní stability Eulerovy metody je interval $(-2, 0)$. Metoda je stabilní, pokud $\lambda h \in (-2, 0)$, tj. pro $h < \frac{2}{5} = 0,4$.

20. Pro daný interval a daný krok dostaneme uzly $1; 1,5; 2; 2,5; 3$. Přibližnou hodnotu řešení v těchto uzlech označme po řadě $U_0, \ldots, U_4$. Z okrajových podmínek dostaneme $U_0 = 0$ a $U_4 = 4$.

Ve vnitřních uzlech nahradíme derivace diferencemi, tj. $u''(x_i) = \dfrac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$. Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}
\frac{U_2 - 2\,U_1 + 0}{0,5^2} + 2U_1 &= 1,5^2,\\
\frac{U_3 - 2\,U_2 + U_1}{0,5^2} + 2U_2 &= 2^2,\\
\frac{4 - 2\,U_3 + U_2}{0,5^2} + 2U_3 &= 2,5^2.
\end{aligned}$$

21. Pro danou oblast a daný krok dostaneme hraniční uzly $[0,0]$, $[1,0]$, $[2,0]$, $[3,0]$, $[4,0]$, $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,3]$, $[0,4]$, $[1,3]$, $[2,2]$, $[3,1]$. Hodnoty v hraničních uzlech určíme z okrajové podmínky: $u(0,0) = u(1,0) = u(2,0) = u(3,0) = u(4,0) = u(0,1) = u(0,2) = u(0,3) = u(0,4) = 0$, $u(1,3) = 3$, $u(2,2) = 8$, $u(3,1) = 9$.

Hodnoty ve vnitřních uzlech označme $U_1 \approx u(1,1)$, $U_2 \approx u(2,1)$, a $U_3 \approx u(1,2)$. Pro rovnici $-\Delta u = f$ použijeme pětibodové schéma

$$4u(x,y) - u(x,y-h) - u(x+h,y) - u(x,y+h) - u(x-h,y) \approx h^2 f(x,y).$$

Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 4U_1 - U_2 - U_3 - 0 - 0 &= -1^2 \cdot 2 \cdot 1, \\ 4U_2 - 0 - U_1 - 9 - 8 &= -1^2 \cdot 2 \cdot 1, \\ 4U_3 - U_1 - 8 - 3 - 0 &= -1^2 \cdot 2 \cdot 2. \end{aligned}$$

22. Hodnoty v hraničních uzlech určíme z okrajové podmínky: $u(0,0) = u(0,1/3) = u(0,2/3) = u(1,0) = u(1,1/3) = u(1,2/3) = 0$, $u(1/3,0) = \sin\frac{\pi}{3} = 0,866$, $u(2/3,0) = \sin\frac{2\pi}{3} = 0,866$.

Hodnoty přibližného řešení ve vnitřních uzlech označme $U_1 \approx u(1/3,1/3)$, $U_2 \approx u(2/3,1/3)$, $U_3 \approx u(1/3,2/3)$, $U_4 \approx u(2/3,2/3)$.

Použijeme explicitní schéma, časovou derivaci budeme aproximovat pomocí dopředné diference a prostorovou derivaci pomocí druhé diference:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}.$$

Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} \frac{U_1 - 0,866}{0,04} &= \frac{0,866 - 2 \cdot 0,866 + 0}{(1/3)^2}, \\ \frac{U_2 - 0,866}{0,04} &= \frac{0 - 2 \cdot 0,866 + 0,866}{(1/3)^2}, \\ \frac{U_3 - U_1}{0,04} &= \frac{U_2 - 2U_1 + 0}{(1/3)^2}, \\ \frac{U_4 - U_2}{0,04} &= \frac{0 - 2U_2 + U_1}{(1/3)^2}. \end{aligned}$$

Zvolené schéma je pro danou volbu časového a prostorového kroku stabilní, protože platí $\tau \leq \frac{h^2}{2}$.