

varianta 0a

Příklad 1. Napište obecný předpis maticových iteračních metod pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Napište postačující podmínku konvergence těchto metod.

Příklad 2. Napište předpis Jacobiho metody pro řešení soustavy

$$\begin{aligned}5x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0, \\x_1 + 10x_2 - x_3 &= 9, \\2x_1 + x_2 + 10x_3 &= 11.\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda pro tuto soustavu Jacobiho metoda konverguje a rozhodnutí zdůvodněte. Jako počáteční vektor zvolte nulový vektor a proveďte dvě iterace.

Příklad 3. Určete Lagrangeův interpolační polynom, jehož graf prochází body $[0, 2]$, $[1, 4]$, $[2, 4]$ a $[4, 0]$.

Příklad 4. Newtonovou metodou určete kladné řešení rovnice $e^x = 2 \cos x$. Jako počáteční hodnotu zvolte $x_0 = 0,5$. Proveďte dvě iterace.

Příklad 5. Je dána rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ na } \Omega = (0, 3)^2$$

s podmínkami

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{3} \text{ pro } x \in (0, 3), \quad u(0, t) = u(3, t) = 0 \text{ pro } t \in (0, 3).$$

Určete soustavu rovnic pro přibližné řešení této rovnice metodou sítí s časovým a prostorovým krokem $\tau = h = 1$. Zvolte metodu, která je za daných podmínek stabilní.

varianta 0b

Příklad 1. Odvod'te vztah pro aproximaci derivace pomocí zpětné diference. Jaká je chyba této aproximace?

Příklad 2. Pomocí LU rozkladu řešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6, \\x_1 + + 3x_3 &= 5.\end{aligned}$$

Příklad 3. Metodou nejmenších čtverců řešte soustavu

$$\begin{aligned}x + y &= 2, \\x + 2y &= 3, \\x + 3y &= 5.\end{aligned}$$

Příklad 4. Vypočtete

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s krokem $h = 0,25$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

Příklad 5. Převed'te diferenciální rovnici

$$y''' + 2y'' + y' + 3y = \sin x^2$$

s podmínkami

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 5, \quad y''(0) = 3,$$

na soustavu rovnic prvního řádu s počátečními podmínkami.

varianta 1a

Příklad 1. Vysvětlete pojem špatně podmíněná úloha. Uveďte příklad dobře podmíněné úlohy a příklad špatně podmíněné úlohy.

Příklad 2. Napište předpis Jacobiho metody pro řešení soustavy

$$\begin{aligned}8x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4, \\x_1 + 10x_2 - x_3 &= 3, \\x_1 + x_2 + 5x_3 &= 1.\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda pro tuto soustavu Jacobiho metoda konverguje a rozhodnutí zdůvodněte. Jako počáteční vektor zvolte nulový vektor a proveďte dvě iterace.

Příklad 3. Určete nejlepší řešení ve smyslu nejmenších čtverců soustavy

$$\begin{aligned}x + 3y &= 5, \\x + y &= 3, \\2x + y &= 4.\end{aligned}$$

Příklad 4. Vypočtěte

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x^2 \, dx$$

pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s krokem $h = 0,25$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

Příklad 5. Je dána rovnice

$$y'' - 2xy = x \text{ na } (0; 0,8), \quad y(0) = 0, \quad y(0,8) = -0,4.$$

Určete soustavu lineárních algebraických rovnic pro přibližné řešení této rovnice metodou sítí s krokem $h = 0,2$.

varianta 1b

Příklad 1. Vysvětlete pojem numericky nestabilní metoda. Uveďte příklad numericky stabilní metody a příklad numericky nestabilní metody.

Příklad 2. Napište předpis Gaussovy-Seidelovy metody pro řešení soustavy

$$\begin{aligned}7x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1, \\x_1 + 8x_2 - 2x_3 &= 4, \\x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5.\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda pro tuto soustavu Gaussova-Seidelova metoda konverguje a rozhodnutí zdůvodněte. Jako počáteční vektor zvolte nulový vektor a proveďte dvě iterace.

Příklad 3. Metodou nejmenších čtverců řešte soustavu

$$\begin{aligned}x + y &= 4, \\2x + y &= 5, \\x + 3y &= 6.\end{aligned}$$

Příklad 4. Vypočtěte

$$\int_1^2 \sin \frac{1}{x^2} dx$$

pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s krokem $h = 0,25$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

Příklad 5. Eulerovou metodou s krokem $h = 0,2$ řešte diferenciální rovnici

$$y' = -5y + x^2 \text{ na } (0; 0,6), y(0) = 0.$$

varianta 1c

Příklad 1. Vysvětlete pojem špatně podmíněná matice. Uveďte příklad dobře podmíněné matice a příklad špatně podmíněné matice.

Příklad 2. Napište předpis Jacobiho metody pro řešení soustavy

$$\begin{aligned}9x_1 + 2x_2 - x_3 &= 9, \\x_1 + 6x_2 + x_3 &= 7, \\x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda pro tuto soustavu Jacobiho metoda konverguje a rozhodnutí zdůvodněte. Jako počáteční vektor zvolte nulový vektor a proveďte dvě iterace.

Příklad 3. Metodou nejmenších čtverců řešte soustavu

$$\begin{aligned}3x + y &= 2, \\x + y &= 1, \\x + 2y &= 0.\end{aligned}$$

Příklad 4. Vypočtěte

$$\int_2^{2,5} \cos \frac{1}{x^2} dx$$

pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s krokem $h = 0,1$. Určete odhad chyby metodou polovičního kroku.

Příklad 5. Eulerovou metodou s krokem $h = 0,1$ řešte diferenciální rovnici

$$y' = -2y + x^3 \text{ na } (0; 0,3), y(0) = 1.$$