Příklady z pravděpodobnosti

1. Vlastnosti pravděpodobnosti, Bayesova věta, nezávislost náhodných jevů

Příklad 1. Určitou populaci tvoří 56% žen a 44% mužů. Sledovanou chorobou trpí 1% žen a 5% mužů. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba trpí sledovanou chorobou?

Příklad 2. Dříve než propukne určitá nemoc, pomáhá ji odhalit test. Pokud osoba trpí touto nemocí, potom je test pozitivní s pravděpodobností 0,995. U zdravé osoby je test pozitivní s pravděpodobností 0,05. Danou nemocí trpí 2 % populace.

a) Karlův test byl pozitivní. Jaká je pravděpodobnost, že má tuto nemoc?

b) Pavlův test byl negativní. Jaká je pravděpodobnost, že nemá tuto nemoc?

Příklad 3. Telegrafní zpráva obsahuje tečky a čárky. Je známo, že průměrně je zkresleno 4% teček a $3,3\%$ čárek a že se ve vysílané zprávě tečky a čárky vyskytují v poměru 5:3. Byla přijata tečka. Určete pravděpodobnost, že tečka byla skutečně vyslána.

Příklad 4. V elektrickém obvodu jsou nezávisle na sobě zapojena dvě zařízení. Pravděpodobnost jejich poruch je $0,05$ a $0,1$. Obvod bude přerušen, pokud alespoň jedno ze zařízení bude mít poruchu. Určete pravděpodobnost přerušení.

Příklad 5. Tři střelci střílí nezávisle na sobě do stejného terče, každý vystřelí jedenkrát. Pravděpodobnost, že první střelec zasáhne cíl je $0,4$, pro druhého střelce je tato pravděpodobnost $0,5$ a pro třetího $0,7$.

a) Jaká je pravděpodobnost, že cíl bude zasažen právě jedenkrát?

b) Jaká je pravděpodobnost, že cíl bude zasažen alespoň jedenkrát?

c) Jaká je pravděpodobnost, že cíl bude zasažen právě dvakrát?

d) Určete pravděpodobnost, že cíl nebude zasažen.

Příklad 6. Jevy A, B, C jsou nezávislé a mají stejnou pravděpodobnost rovnou $0,1$. Určete pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden z těchto jevů.

2. Náhodná veličina s diskrétním rozdělením pravděpodobnosti

Příklad 1. Náhodná veličina X nabývá hodnot 2,3,4,5,6, každou hodnotu s pravděpodobností 1/5. Náhodná veličina Y nabývá hodnot 0,1,4,7,8, každou hodnotu nabývá s pravděpodobností 1/5. Porovnejte střední hodnoty a rozptyly těchto náhodných veličin.

Příklad 2. Pravděpodobnost, že výrobek je zmetek je 0,1. Určete pravděpodobnost, že mezi 20 takovými výrobky budou nejvýše 3 zmetky.

Příklad 3. Výrobek vydrží zatěžkávací zkoušku s pravděpodobností 0,9. Testování výrobků je ukončeno, pokud nějaký výrobek zkoušku nevydrží. Určete pravděpodobnost, že budou testovány alespoň tři výrobky.

Příklad 4. Výrobek vydrží zatěžkávací zkoušku s pravděpodobností 0,9. Testování výrobků je ukončeno, pokud tři výrobky zkoušku nevydrží. Určete pravděpodobnost, že při testování proběhne právě sedm zkoušek.

Příklad 5. Na telefonní ústřednu přichází průměrně 50 hovorů za hodinu. Určete pravděpodobnost, že během prvních tří minut přijdou maximálně dva hovory.

Příklad 6. V sérii 100 výrobků jsou obsaženy 2 zmetky. Je náhodně vybráno 20 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi těmito 20 vybranými výrobky bude nejvýše jeden zmetek?

3. Náhodná veličina se spojitým rozdělením pravděpodobnosti

Příklad 1. Náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c \ \sin 2x & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Určete hodnotu konstanty c, střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku a pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty z intervalu $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$.

Příklad 2. Průměrná doba životnosti výrobku je 30 měsíců. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek vydrží alespoň tři roky za předpokladu, že náhodná veličina reprezentující dobu životnosti výrobku má exponenciální rozdělení?

Příklad 3. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na intervalu $[-1, 2]$. Určete její střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku a pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude kladné hodnoty.

Příklad 4. Náhodná veličina X má normální rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou 4 a rozptylem 25. Určete pravděpodobnost, že tato náhodná veličina nabude hodnoty z intervalu $(2, 5)$.

Příklad 5. Náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení pravděpodobnosti, $X \sim LogN(2, 9)$. Určete pravděpodobnost, že tato náhodná veličina nabude hodnoty menší než 5.

4. Náhodný vektor

Příklad 1. Náhodný vektor (X, Y) nabývá hodnoty $(0, 1)$ s pravděpodobností $1/2$, hodnoty $(0, 2)$ s pravděpodobností $1/3$ a hodnoty $(1, 1)$ s pravděpodobností $1/6$. Vypočtěte korelační koeficient náhodných veličin X a Y a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé. Rozhodněte, zda náhodná veličina Y závisí na X lineárně.