TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Symbolem Ω označme množinu všech výsledků náhodného pokusu. Prvky množiny Ω se nazývají elementární jevy.

Předpoklad: Ω není prázdná množina.

Množina Ω může být:

- konečná
- spočetná
- nespočetná

Neprázdný systém množin $\mathcal{A}$ podmnožin Ω se nazývá σ-algebra, jestliže platí

- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega - A \in \mathcal{A}$,
- $A_i \in \mathcal{A}, i \in I \subset \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Předpoklad: Indexová množina I je nejvýše spočetná.

$A \in \mathcal{A}$ se nazývá náhodný jev.

Nechť A a B jsou jevy. Potom

Ω se nazývá jev jistý,

$\emptyset$ se nazývá jev nemožný,

$A' := \Omega - A$ se nazývá jev doplňkový (opačný) k jevu A,

Je-li $A \cap B = \emptyset$, řekneme, že jevy A a B jsou disjunktní.

Nastal-li jev $A \cup B$, pak řekneme, že nastal je A nebo B.

Nastal-li jev $A \cap B$, pak řekneme, že nastal je A a zároveň jev B.

Je-li $A \subset B$, řekneme, že A je podjevem B.

Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin Ω. Funkci $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ nazýváme pravděpodobnost, jestliže platí

- $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$,
- $P(\Omega) = 1$,
- $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i) \ \ \forall A_i \in \mathcal{A}$,
  kde $A_i \cap A_j = \emptyset$, pokud $i \neq j$.

Trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazýváme pravděpodobnostní prostor.

Speciální případ:
Jestliže je Ω konečná a všechny elementárni jevy jsou stejně možné, potom definujeme klasickou pravděpodobnost jevu A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde $|\ \ |$ označuje počet prvků.

n-prvkovou permutací nazýváme uspořádanou n-tici z n-prvků, ve které se prvky neopakují. Počet všech n-prvkových permutací je $P(n) = n!$.

k-prvkovou variací z n-prvků nazýváme uspořádanou k-tici z n-prvků, ve které se prvky neopakují. Počet všech je

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

k-prvkovou kombinací z n-prvků nazýváme neuspořádanou k-tici z n-prvků, ve které se prvky neopakují. Počet všech je

$$K(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

n-prvkovou permutací s opakováním nazýváme uspořádanou n-tici z n-prvků, ve které se prvky mohou opakovat. Počet všech je $P'(n) = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots n_k!}$, kde n_i označuje počet opakování i-tého prvku.

k-prvkovou variací z n-prvků s opakováním nazýváme uspořádanou k-tici z n-prvků, ve které se prvky mohou opakovat. Počet všech je $V'(k, n) = n^k$.

k-prvkovou kombinací z n-prvků s opakováním nazýváme neuspořádanou k-tici z n-prvků, ve které se prvky mohou opakovat. Počet všech je $K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$.

Vlastnosti pravděpodobnosti:

Nechť $A, B, C \in \mathcal{A}$, potom

- $P(A') = 1 - P(A)$,
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Nechť $A, B \in \mathcal{A}$ a $P(B) > 0$. Potom podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky B značíme $P(A|B)$ a definujeme

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

VĚTA: Nechť $A, B \in \mathcal{A}$ a $P(B) > 0$. Potom
$P(A'|B) = 1 - P(A|B)$.

Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I \subset \mathbb{N}$. Řekneme, že jevy A_i, $i \in I$, tvoří úplný systém jevů (rozklad Ω), jestliže platí

- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$,
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Věta o celkové pravděpodobnosti:

Nechť jevy $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I \subset \mathbb{N}$, tvoří úplný systém jevů a nechť $P(A_i) > 0 \ \forall i \in I$. Potom platí

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) P(A_i).$$

Bayesova věta:

Nechť jevy $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I \subset \mathbb{N}$, tvoří úplný systém jevů a nechť $P(A_i) > 0 \ \forall i \in I$, $P(B) > 0$. Potom platí

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{i \in I} P(B|A_i) P(A_i)}.$$

Nezávislost dvou jevů

Jevy A a B se nazývají nezávislé, jestliže

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

VĚTA: Nechť A a B jsou nezávislé jevy, $P(B) > 0$. Potom $P(A|B) = P(A)$.

Nezávislost n jevů

Jevy $A_1, \ldots, A_n$ se nazývají nezávislé, jestliže pro každou k-tici náhodných jevů $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ vybranou z jevů $A_1, \ldots, A_n$ platí

$$P\left(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right).$$