TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Nezávislost dvou jevů

Jevy A a B se nazývají nezávislé, jestliže

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)\,.$$

VĚTA: Nechť A a B jsou nezávislé jevy, $P(B) > 0$. Potom $P(A|B) = P(A)$.

Nezávislost n jevů

Jevy $A_1, \ldots, A_n$ se nazývají nezávislé, jestliže pro každou k-tici náhodných jevů $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ vybranou z jevů $A_1, \ldots, A_n$ platí

$$P\left(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right).$$

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazývá náhodná veličina, jestliže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}.$$

Nejmenší σ-algebra podmnožin $\mathbb{R}$ obsahující všechny intervaly se nazývá borelovská σ-algebra a značí se $\mathcal{B}$.

Funkce $P_X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$P_X(B) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$$

se nazývá rozdělení pravděpodobnosti. Často značíme $P(X \in B) := P_X(B)$.

Náhodná veličina s diskrétním rozdělením pravděpodobnosti

Řekneme, že náhodná veličina má diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, jestliže existuje nejvýše spočetně reálných čísel x_i, $i \in I$, a kladných čísel $p_i = P(X = x_i)$ takových, že $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

Funkce P_X daná předpisem $P_X(x_i) = P(X = x_i)$ se nazývá pravděpodobnostní funkce.

$EX := \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ se nazývá střední hodnota náhodné veličiny X.

$Ef(X) := \sum_{i \in I} f(x_i) P(X = x_i)$

$\mathrm{var} X := E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$ se nazývá rozptyl náhodné veličiny X.

Funkce F definovaná předpisem $F(x) = P(X < x)$ se nazývá distribuční funkce náhodné veličiny X.

Vybraná diskrétní rozdělení

1. Alternativní rozdělení $\mathrm{Alt}p$, $0 < p < 1$
Náhodná veličina X nabývá hodnoty 0 nebo 1 a platí

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Jestliže náhodná veličina X nabyde hodnoty 1, je to označováno jako úspěch nebo zdar, jinak mluvíme o neúspěchu nebo nezdaru.

2. Binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(n, p)$, $0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}$ (Bernoulliovo schéma)
Náhodná veličina X nabývá hodnoty $k = 0, \ldots, n$ s pravděpodobností

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Náhodná veličina X určuje počet úspěchů v sérii n nezávislých pokusů.

3. Poissonovo rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$
Náhodná veličina X nabývá hodnoty $k \in \mathbb{N}_0$ s pravděpodobností

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Náhodná veličina X určuje počet událostí v určitém časovém intervalu, λ se nazývá intenzita a vyjadřuje průměrný počet událostí v tomto intervalu.

4. Geometrické rozdělení $\mathrm{Ge}(p)$, $0 < p < 1$
Náhodná veličina X nabývá hodnoty $k \in \mathbb{N}_0$ s pravděpodobností

$$P(X = k) = (1 - p)^k p.$$

Náhodná veličina X určuje počet neúspěchů před prvním úspěchem.

5. Hypergeometrické rozdělení $\mathrm{HGe}\,(n, m, l)$, $n, m, l \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, $l \leq n$

Náhodná veličina X nabývá hodnoty $k \in \mathbb{N}_0$ s pravděpodobností

$$P\,(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{l-k}}{\binom{n}{l}}, \;\; k = \max\,(0, m + l - n)\,, \ldots, \min\,(m, l)\,.$$

Z celkového počtu n prvků má m prvků určitou vlastnost. Vybereme l prvků, náhodná veličina X určuje počet prvků se sledovanou vlastností mezi l vybranými prvky.

6. Negativně binomické rozdělení $\mathrm{NeBi}\,(r, p)$, $0 < p < 1$, $r \in \mathbb{N}$

Náhodná veličina X nabývá hodnoty $k \in \mathbb{N}_0$ s pravděpodobností

$$P\,(X = k) = \binom{r + k - 1}{k} p^r\,(1 - p)^k\,.$$

Náhodná veličina X určuje počet neúspěchů před r-tým úspěchem.