TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Náhodná veličina se spojitým rozdělením pravděpodobnosti

Řekneme, že náhodná veličina X má spojité rozdělení pravděpodobnosti, jestliže existuje nezáporná funkce f taková, že platí

$$P\left(a < X < b\right) = \int_a^b f\left(x\right) dx.$$

Funkce f, která splňuje uvedený vztah, se nazývá hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

VĚTA: Je-li funkce f hustota nějaké spojité náhodné veličiny, potom platí $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = 1$.

VĚTA: Jestliže f je nezáporná spojitá funkce a splňuje podmínku $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = 1$, potom existuje spojitá náhodná veličina X taková, že f je její hustota.

Charakteristiky spojité náhodné veličiny

$EX := \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ se nazývá střední hodnota náhodné veličiny X.

$Eg(X) := \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx$

$varX := E\left(X - EX\right)^2 = EX^2 - \left(EX\right)^2$ se nazývá rozptyl náhodné veličiny X.

$\sigma_X := \sqrt{varX}$ se nazývá směrodatná odchylka náhodné veličiny X.

Funkce F definovaná předpisem $F(x) = P(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$, se nazývá distribuční funkce náhodné veličiny X.

Vybraná spojitá rozdělení

1. Rovnoměrné rozdělení $\mathrm{R}(I)$

Řekneme, že náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na omezeném intervalu I, jestliže je její hustota f definována předpisem

$$f(x) = \frac{1}{|I|}, \ x \in I, \quad f(x) = 0, \ x \notin I.$$

2. Normální rozdělení $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$

Řekneme, že náhodná veličina X má normální rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, jestliže je její hustota f definována předpisem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ se značí Φ a je tabelována.

VĚTA: $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$.

3. Logaritmicko-normální rozdělení $\mathrm{LogN}\left(\mu, \sigma^2\right)$
Řekneme, že náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení pravděpodobnosti s parametry μ a σ^2, jestliže $\ln X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

4. Exponenciální rozdělení $\mathrm{Exp}(\lambda)$

Řekneme, že náhodná veličina X má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti s parametrem λ, jestliže je její hustota f definována

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \; x > 0, \quad f(x) = 0, \; x \leq 0.$$

Náhodná veličina X často reprezentuje dobu do nějaké události (do první poruchy). Parametr λ se nazývá intenzita a vyjadřuje průměrnou dobu do dané události.

VĚTA: Jestliže náhodná veličina X má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti s parametrem λ, potom $EX = \lambda$ a $varX = \lambda^2$.

VĚTA: Jestliže náhodná veličina X má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti, potom platí

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t).$$

Proto říkáme, že exponenciální rozdělení je rozdělení bez paměti.

5. χ^2-rozdělení $\chi^2(n)$

Řekneme, že náhodná veličina X má χ^2-rozdělení o n stupních volnosti, jestliže $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, kde $X_i \sim N(0,1)$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

Řekneme, že náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé, jestliže platí

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) \ldots P(X_n < x_n)$$

pro všechna $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

6. Studentovo t-rozdělení $t(n)$

Řekneme, že náhodná veličina X má Studentovo rozdělení o n stupních volnosti, jestliže $X = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$, kde U a V jsou nezávislé náhodné veličiny a platí $U \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2(n)$.

Náhodný vektor

Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny, potom vektor

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$ se nazývá náhodný vektor.

Charakteristiky náhodného vektoru

$$E\mathbf{X} = \begin{pmatrix} EX_1 \\ EX_2 \\ \vdots \\ EX_n \end{pmatrix}$$ se nazývá střední hodnota náhodného vektoru.

$var\mathbf{X} = \left(cov\left(X_i, X_j\right)\right)_{i,j=1}^{n}$ se nazývá varianční matice náhodného vektoru,

$cov\left(X_i, X_j\right) := E\left(X_i - EX_i\right)\left(X_j - EX_j\right) = EX_iX_j - EX_i\ EX_j$ se nazývá kovariance náhodných veličin X_i a X_j.

$\rho(\mathbf{X}) = (\rho(X_i, X_j))_{i,j=1}^n$ se nazývá korelační matice náhodného vektoru, $\rho(X_i, X_j) := \frac{cov(X_i,X_j)}{varX_i varX_j}$ se nazývá korelační koeficient náhodných veličin X_i a X_j.

VĚTA: a) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
b) Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, potom $cov(X, Y) = 0$ a $\rho(X, Y) = 0$.
c) Jestliže $\rho(X, Y) = 1$, potom existují konstanty $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$ takové, že $Y = aX + b$.
d) Jestliže $\rho(X, Y) = -1$, potom existují konstanty $a < 0$ a $b \in \mathbb{R}$ takové, že $Y = aX + b$.